

CAPÍTULO 15 ⁽¹⁾

EMPUXOS DE TERRAS

1. INTRODUÇÃO

Por empuxo de terra entendem-se as solicitações do solo sobre as estruturas que interagem com os maciços terrosos, ou forças que se desenvolvem no interior destes maciços.

O cálculo dos empuxos constitui uma das maiores e mais antigas preocupações da engenharia civil; data de 1776 a primeira contribuição efetiva ao tema, em muito anterior ao nascimento da Mecânica dos Solos como ciência autônoma. Trata-se de um problema de grande interesse prático, de ocorrência freqüente e de determinação complexa.

Os muros de arrimo, os escoramentos de escavações os encontros de pontes, os problemas de capacidade de carga de fundações, entre outras, são as obras que exigem, em seus dimensionamentos e análises de estabilidade, o conhecimento dos valores dos empuxos.

No estudo deste assunto, como na maioria dos problemas sob domínio da Mecânica dos Solos, raras são as situações em que é possível determinar forças e, por conseguinte, tensões com base apenas nas condições de equilíbrio; os problemas são, em geral, estaticamente indeterminados.

Para vencer esta dificuldade é imperioso considerar as condições de compatibilidade entre os deslocamentos, o que implica a necessidade de conhecer-se também a variação das tensões com as deformações, ou seja, a curva $\sigma \times \varepsilon$.

Há, em síntese, duas linhas de conduta no estudo dos empuxos de terra. A primeira, de cunho teórico, apóia-se em tratamentos matemáticos elaborados a partir de modelos reológicos que tentam traduzir, tanto quanto possível, o comportamento preciso da relação tensão x deformação dos solos. Este procedimento, em sua forma mais abrangente, considerando todos os aspectos do comportamento real dos solos, implica em dificuldades matemáticas insuperáveis. Isto leva a tomar-se hipóteses simplificadoras que acabam por definir uma situação que se distancia dos problemas práticos de interesse.

A segunda forma de abordagem é de caráter empírico-experimental; são recomendações colhidas de observações em modelos de laboratório e em obras instrumentadas.

A automatização dos métodos numéricos (diferenças finitas, método dos elementos finitos) através de computadores e a evolução das técnicas de amostragem e ensaios têm propiciado, nos últimos anos, um desenvolvimento significativo dos processos de cunho teórico.

As análises através do método dos elementos finitos apresentam a vantagem de calcular tanto os empuxos como as deformações do solo e da estrutura. Todos os aspectos envolventes no problema tais como interação solo-estrutura, seqüência construtiva, forma de abordagem da curva $\sigma \times \varepsilon$, podem ser levados em consideração. O único senão do método é devido às dificuldades que se enfrenta para definir com precisão a curva $\sigma \times \varepsilon$ do solo e os parâmetros a ela relacionados, que são, juntamente com os dados de geometria, de massa específica, de condições de contorno, o "input" do problema.

Neste capítulo serão tratados apenas os processos clássicos de determinação de empuxos, de Rankine e de Coulomb.

2. COEFICIENTES DE EMPUXO ATIVO, EM REPOUSO E PASSIVO

Para a determinação dos coeficientes de empuxo considere-se um semi-espaco infinito, constituído por um solo granular, homogêneo, isotrópico, não saturado e de superfície horizontal (Figura 15.1). Tome-se um elemento de espessura dz situado a uma profundidade z .

⁽¹⁾ Mecânica dos Solos Volume II- Orencio Monje Vilar & Benedito de Souza Bueno- Departamento de Geotecnia- Escola de Engenharia de São Carlos

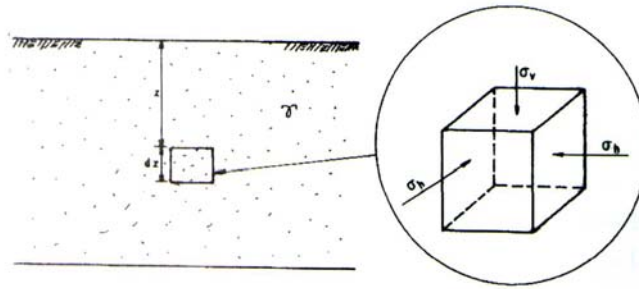


Figura 15.1 - Maciço de extensão semi-infinita, homogêneo e isotrópico em condição de repouso.

Sobre as faces do elemento atuam tensões verticais e horizontais, σ_v e σ_h , respectivamente. Em razão da geometria do problema estas tensões são principais. São elas que provocam as deformações no elemento; estas, se descritas pela teoria da elasticidade tomam a forma:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_v - \sigma_h \cdot 2\mu]$$

$$\varepsilon_h = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_h - \mu(\sigma_v + \sigma_h)]$$

Para condição em que as deformações laterais são impedidas $\varepsilon_h = 0$, tem-se:

$$\sigma_h - \mu \cdot [\sigma_v + \sigma_h] = 0$$

$$\sigma_h - \mu \cdot \sigma_v - \mu \sigma_h = 0$$

Chamando a relação entre as tensões horizontais (σ_h) e tensões verticais (σ_v) de K_0 , temos:

$$K_0 = \frac{\sigma_h}{\sigma_v} = -\frac{\mu}{1-\mu} \quad \text{ou} \quad K_0 = \left(\frac{\sigma_h}{\sigma_v} \right)_{\varepsilon_h} = 0$$

Esta condição, $\varepsilon_h = 0$ (deformações laterais nulas), é denominada em repouso e K_0 , coeficiente de empuxo em repouso.

Imagine-se agora que a face esquerda do elemento dz foi substituída, sem que se introduzisse nenhuma perturbação no solo, por um elemento de suporte (um muro de arrimo, por exemplo) e que se procedeu à retirada do material situado deste lado (Figura 15.2).

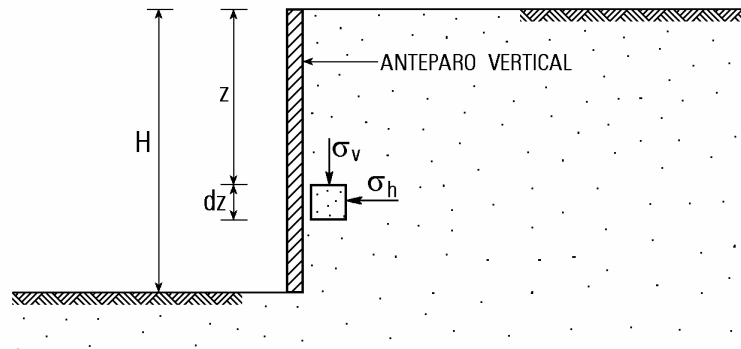


Figura 15.2 - Estrutura de suporte em repouso.

A partir desta nova situação, mantendo-se σ_v constante, é possível estabelecer-se duas condições limites para o problema:

- permitindo-se os deslocamentos do anteparo para a esquerda, ou seja, provocando-se uma expansão no solo: a tensão horizontal decresce até um valor limite mínimo, σ_{ha} , correspondente à ruptura do solo. Esta condição é denominada ativa e a relação $\sigma_{ha}/\sigma_v = K_a$, coeficiente de empuxo ativo;
- proporcionando deslocamentos do anteparo contra o maciço, isto é, causando uma compressão no solo; a tensão horizontal cresce até um valor limite máximo, o σ_{hp} , que corresponde também a ruptura. Esta condição é denominada passiva e a relação $\sigma_{hp}/\sigma_v = K_p$, coeficiente de empuxo passivo.

Deslocamentos adicionais no anteparo para além daqueles que provocam as condições ativa e passiva não mais alteram os valores assumidos pelas tensões horizontais visto que o modelo reológico empregado é o elasto-plástico. Isto significa que ao atingir as condições limites o solo plastifica, ou seja, as deformações continuam a crescer para um nível de tensão mantido constante.

A Figura 15.3 resume aquilo que foi definido.

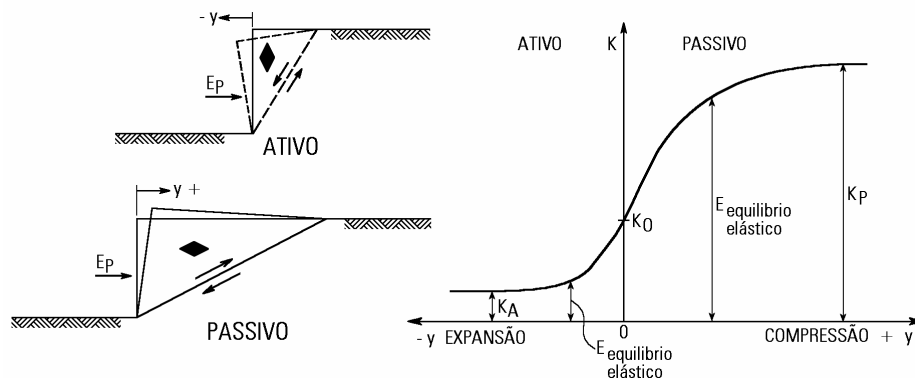


Figura 15.3 - Coeficiente de empuxo: a) condição ativa; b) condição passiva; c) coeficiente de empuxo em função dos deslocamentos do anteparo.

Quando o anteparo movimenta-se livremente para a direita ou para a esquerda estabelecem-se as condições extremas de empuxo passivo e ativo, respectivamente. Estes dois casos definem os limites da ruptura do solo e são conhecidos como estados de equilíbrio limite.

Os valores dos empuxos no intervalo entre as condições ativa e passiva situam-se em um estado de equilíbrio elástico. Neles os deslocamentos do anteparo são insuficientes para provocar a

ruptura; o solo ainda está na sua fase elástica (lembrar que o modelo reológico utilizado é o elasto-plástico).

As condições de equilíbrio de forças estabelecidas para qualquer elemento do maciço, dentro da fase de equilíbrio elástico, definem um sistema de equações no qual o número de incógnitas supera o número de equações. O problema é, portanto, estaticamente indeterminado, sem uma solução matemática.

Considere-se, para verificação deste fato, o elemento de solo atrás referido. As tensões normais e cisalhantes que atuam sobre os pontos colocados sobre uma face do elemento variam à medida que se caminha para a face oposta, ou seja, ao longo dos comprimentos dx e dz . As análises de equilíbrio fornecerão as seguintes equações:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = X$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = Z$$

As forças X e Z são componentes das forças externas ou das forças de massa, que atuam sobre o elemento; elas são, portanto, de valor conhecido. Como foi atrás referido tem-se um sistema de equações com duas equações e três incógnitas, quais sejam σ_x , σ_z , τ_{xz} .

A compatibilização entre o número de equações e o número de incógnitas é possível quando se adiciona ao sistema definido anteriormente aquela equação que traduz o critério de ruptura ou de resistência do solo. No caso mais geral da Mecânica dos Solos esta equação será a estabelecida pelo critério de Mohr Coulomb ($\tau = c + \sigma \cdot \text{tg}\phi$). No entanto isto é possível para as condições de equilíbrio limite. Significa então que apenas as condições de empuxo ativo e passivo são matematicamente determinadas. Qualquer outra, inclusive a de repouso, não o é.

A condição de repouso, cujo conhecimento é de importância relevante, como será mostrado a seguir, só pode ser determinada experimentalmente. As técnicas de ensaios são ainda precárias, além de trabalhosas.

Diante do exposto pode concluir-se que a determinação dos empuxos de terra constitui uma tarefa de admirável complexidade. As condições extremas, determináveis, exigem deformações suficientes para serem despertadas. Experiências realizadas com areias evidenciam que para o caso ativo, deslocamentos da ordem de 0,1% da altura do anteparo são suficientes para provocar o estado de equilíbrio limite no caso ativo e deslocamentos maiores, de 4 a 5%, para o caso passivo.

Em muitos casos as estruturas de suporte são projetadas para trabalhar em intervalos situados nas faixas ativo-repouso e repouso-passivo. O posicionamento será determinado pela maior ou menor capacidade de deformação das estruturas. Segundo Mello (1975), em termos práticos adota-se a postura de calcular os empuxos ativo e passivo (E_A e E_p), alterando-os, em seguida, com auxílio de um fator para fugir-se da situação de ruptura. No caso ativo, o valor de E_A será majorado por um coeficiente tomado, em geral, entre 1,3 a 1,5. Para a situação passiva, o valor de E_p será dividido por um fator compreendido na faixa de 1,4 a 1,5. Desta forma, os valores de projeto situar-se-ão dentro da fase de equilíbrio elástico. No caso ativo, este procedimento implica em obras de maior porte, portanto mais caras; em compensação o inverso ocorre para a situação passiva. Em ambos, porém, há a garantia da ausência da ruptura do solo arrimado.

3. COEFICIENTE DE EMPUXO EM REPOUSO

A condição de empuxo em repouso é estabelecida quando as deformações laterais do solo são impedidas, ou seja:

$$K_0 = \left(\frac{\sigma_h}{\sigma_v} \right)_{\varepsilon_h} = 0$$

O valor de K_0 depende do tipo de solo, das condições geológicas que governaram a sua formação e do histórico de tensões a que foi submetido desde a sua gênese. Verifica-se que certos solos, cujas formações foram regidas pela sedimentação natural, possuem K_0 aproximadamente constante com a profundidade. Neste fato reside o interesse prático pela sua determinação, devido a que, nesta condição, K_0 depende apenas do tipo de solo e do método de deposição.

Como foi atrás referido, as determinações de K_0 só são possíveis por via experimental, a partir de ensaios de laboratório e de campo. Elas exigem técnicas de ensaio e equipamentos especializadas e de grande sensibilidade; são trabalhosas e, em geral não se situam na categoria dos ensaios de rotina da maioria dos laboratórios.

Bishop e Henkel (1957) propuseram uma técnica de determinação de K_0 baseada em ensaios triaxiais como deformações laterais impedidas. Os ensaios podem ser realizados de forma drenada ou não drenada, com amostras saturadas ou parcialmente saturadas.

Existem ensaios de campo, como o pressiômetro, que permitem a determinação "in situ" do valor de K_0 .

Em razão das dificuldades existentes para o conhecimento de K_0 , várias relações empíricas foram propostas para a sua determinação, dentre as quais pode enumerar-se:

- a) $K_0 = (1 - \text{sen } \phi')$ Jaky (1944);
- b) $K_0 = 0,9(1 - \text{sen } \phi')$ Frazer (1957);
- c) $K_0 = (1 - \text{sen } \phi') \frac{1 - \text{sen } \phi'}{1 + \text{sen } \phi'}$ Kezdi (1962);
- d) $K_0 = (0,95 - \text{sen } \phi')$ Brooker (1965)
Ireland

A expressão de Jaky, apresentada no item a), é uma forma simplificada da expressão original proposta,

$$K_0 = \left(1 + \frac{2}{3} \text{sen } \phi'\right) \frac{1 - \text{sen } \phi'}{1 + \text{sen } \phi'}$$

Alpan (1967) sugere que se adote a equação a) para solos arenosos e a relação abaixo para solos argilosos normalmente adensados:

$$K_0 = 0,19 + 0,233 \cdot \log(\text{IP}); \text{ IP em } \%$$

Segundo Alpan a determinação experimental de K_0 é, no mínimo, uma tarefa laboriosa e se o efeito do pré-adensamento for considerado, ela torna-se proibitiva. Ainda não existe uma análise teórica válida para o problema e esta pode tornar-se impraticável em vista da não linearidade existente entre tensão e deformação.

Nos solos pré-adensados, tendo havido uma redução parcial da sobrecarga, nem sempre acompanhada de uma redução de deformação (o solo não tem comportamento elástico) pode encontrar-se valores de K_0 maiores do que a unidade. A Tabela 15-1 fornece valores de K_0 para alguns tipos de solos.

Tabela 15.1 - Valores de K_o (composta a partir de Bernatzik, 1947; Bishop, 1957,1958; Simons, 1958; Terzaghi e Peck,1967).

| TIPO DE SOLO | LL | LP | IP | ATIVIDADE | K_o |
|--|------|------|------|-----------|-------------|
| Areia compacta (e = 0,60) | - | - | - | - | 0,49 |
| Areia média (e = 0,70) | - | - | - | - | 0,52 |
| Areia fofa (e = 0,88) | - | - | - | - | 0,64 |
| Areia fofa saturada | - | - | - | - | 0,46 |
| Areia compacta saturada | - | - | - | - | 0,36 |
| Argila residual compacta | - | - | 9,3 | 0,44 | 0,42 |
| Argila residual compacta | - | - | 31,0 | 1,55 | 0,66 |
| Argila mole, orgânica, indeformada | 74,0 | 28,6 | 45,4 | 1,20 | 0,57 |
| Argila marinha, indeformada | 37,0 | 21,0 | 16,0 | 0,21 | 0,48 |
| Argila sensível | 34,0 | 24,0 | 10,0 | 0,18 | 0,52 |
| Argilas | - | - | - | - | 0,60 a 0,80 |
| Areias não compactadas (fofas ou compactas) | - | - | - | - | 0,40 a 0,50 |
| Areias compactas por camadas | - | - | - | - | 0,80 |

4. MÉTODO DE RANKINE

Os processos clássicos utilizados para a determinação dos empuxos de terra são métodos de equilíbrio limite. Admite-se neles que a cunha de solo situada em contacto com a estrutura de suporte esteja num dos possíveis estados de plastificação, ativo ou passivo. Esta cunha tenta deslocar-se da parte fixa do maciço e sobre ela são aplicadas as análises de equilíbrio dos corpos rígidos.

A análise de Rankine apoia-se nas equações de equilíbrio interno do maciço. Estas equações são definidas para um elemento infinitesimal do meio e estendida a toda a massa plastificada através de integração. Esta análise enquadra-se no teorema da região inferior (TRI) da teoria da plasticidade.

Como filosofia básica este teorema defende, em primeiro lugar, o equilíbrio entre os campos de tensão externos e internos que se estabelecem sobre a cunha plastificada. As tensões externas são motivadas por solicitações aplicadas na superfície do terreno ou pela ação do peso próprio da cunha. As solicitações internas são as reações que se desenvolvem na cunha, como consequência das solicitações externas. Como segundo aspecto, o TRI impõe respeito a um critério de resistência, ou seja, que não haja em nenhum ponto desta cunha um estado de tensão capaz de levá-la, nem mesmo numa zona localizada, à condição de ruptura.

Estas duas exigências implicam uma condição de iminência de plastificação, ou seja, estado ativo ou passivo. Elas podem ser representadas, neste caso, graficamente num plano $\sigma \times \tau$, por círculos de Mohr que tangenciam as envoltórias de ruptura, pois o círculo de Mohr é a representação gráfica das condições de equilíbrio em torno de um ponto. As condições de iminência de ruptura, nos casos ativo e passivo, são designadas neste plano pelos pontos da envoltória de resistência.

As linhas envoltórias separam o plano $\sigma \times \tau$ em duas regiões: na primeira, interna a elas, há um regime de equilíbrio elástico; na segunda, externa, há um processo de plastificação ou de ruptura em curso e, sobre os pontos da envoltória há situações de equilíbrio limite.

Um ponto qualquer, no interior de um maciço em repouso, está sob um estado de tensão que pode ser representado por um círculo de Mohr. Nas condições de geometria simples, maciço infinito

de superfície horizontal, os valores de σ_v e σ_h são tensões principais, basta para isto considerar a simetria do problema.

Mantendo-se constante o valor de σ_v e fazendo variar σ_h desde o seu valor inicial, de forma crescente ou decrescente, estabelecem-se as condições limites, ou seja, chega-se a dois círculos de Mohr que tangenciam as envoltórias de resistência. As relações entre σ_v e σ_h definem os estados de empuxo ativo e passivo, conforme tenha sido o comportamento de σ_h crescente, ou decrescente, pela ordem. A Figura 15.4 reproduz aquilo que ora foi definido.

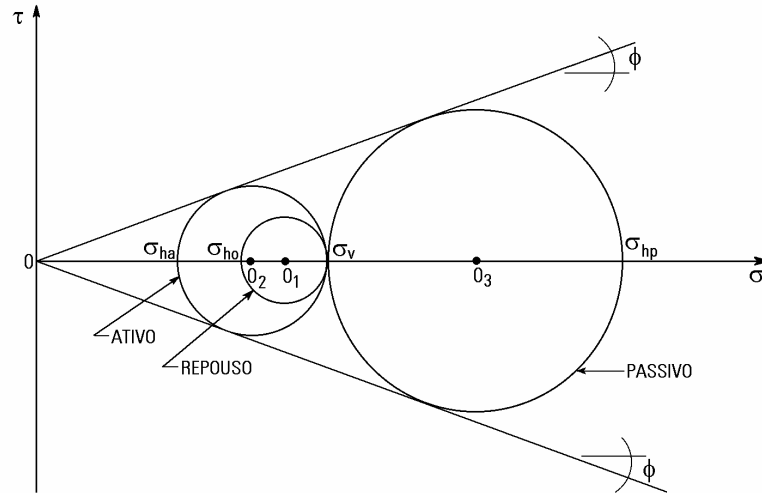


Figura 15.4 - Círculos de Mohr correspondentes aos estados de tensão em repouso, ativo e passivo.

A solução de Rankine (1856), estabelecida para solos granulares e entendida por Rèsal (1910) a solos com coesão, constitui a primeira contribuição ao estudo das condições de equilíbrio limite dos maciços, tendo em conta as equações de equilíbrio interno do solo; em razão disto, estas condições são conhecidas como estados de plastificação de Rankine.

O método de Rankine, que consiste na integração, ao longo de altura do elemento de suporte, das tensões horizontais atuantes, calculadas a partir do sistema de equações estabelecidas para o maciço, fundamenta-se nas seguintes hipóteses:

- a) maciço homogêneo de extensão infinita e de superfície plana (horizontal);
- b) maciço nos estados de plastificação de Rankine.

Embora teoricamente a solução de Rankine só seja válida para muro de parede vertical, perfeitamente lisa, que é quando se atingem os estados de plastificação de Rankine (superfície de escorregamento fazendo um ângulo igual a $(45 + \phi/2)$ ou $(45 - \phi/2)$ com o plano principal maior, para as condições ativa e passiva, respectivamente (Figura 15.5), ela é entendida também aos casos em que o tardo do muro faz um ângulo β com a vertical. Quando a superfície do terreno é inclinada de um ângulo \mathbf{i} com a horizontal, há que se considerar o muro com uma rugosidade suficiente para inclinar as tensões resultantes do mesmo valor.

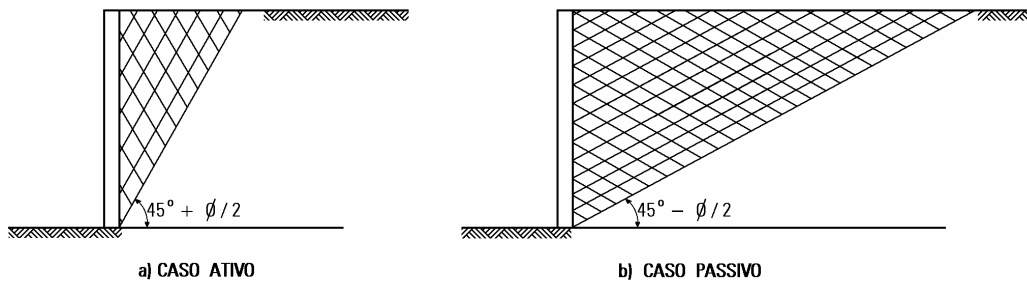


Figura 15.5 - Condições para aplicação da teoria de Rankine.

À medida que se afasta das condições teóricas fundamentais, o método fornece valores que se distanciam cada vez mais dos valores práticos observados. A presença do atrito ou de adesão na interface gera tensões tangenciais que contribuem para resistir ao deslocamento da cunha plastificada; no caso ativo é empuxo será superestimado e no caso passivo, subestimado.

Além disso, o atrito propicia uma redução da componente horizontal do empuxo (menor quanto maior for o valor do atrito (δ) entre o solo e o muro) e provoca o encurvamento das superfícies de escorregamento (sem ele reta), Figura 15.6.

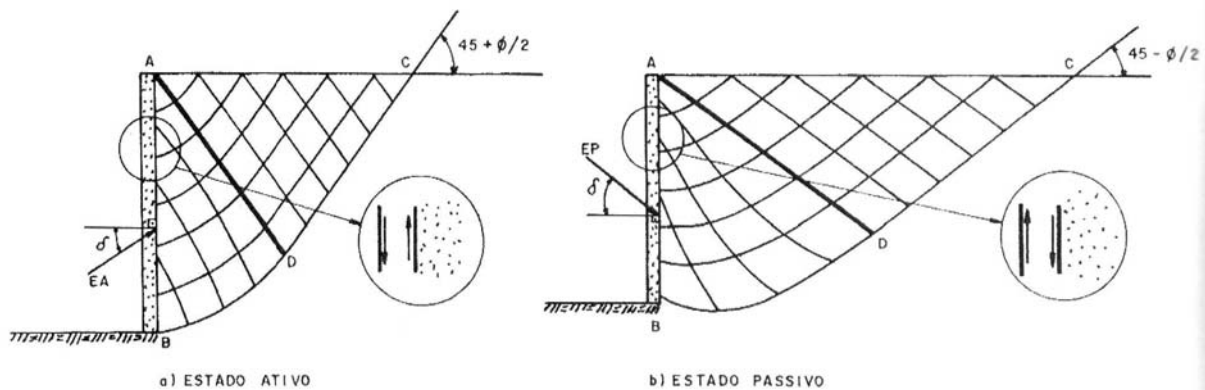


Figura 15.6 - Efeito do atrito solo-estrutura sobre as direções dos planos de ruptura.

Como foi atrás referido, as expressões analíticas do método de Rankine podem ser obtidas a partir de construções gráficas do círculo de Mohr.

A seguir mostram-se os casos, de geometria simples, em que é possível aplicar a teoria de Rankine. Os casos de geometria mais complexa serão analisados através dos processos gráficos da teoria de Coulomb.

- a) Empuxos em maciços de superfície horizontal
- a.1) Solos granulares

Sejam as considerações feitas para o solo da Figura 15.7.

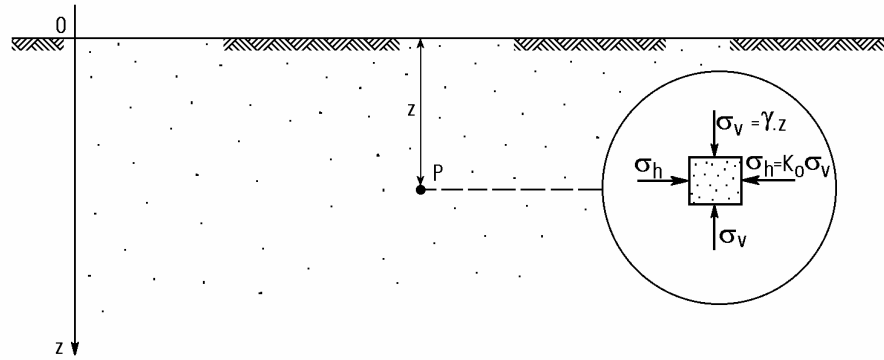


Figura 15.7 - Estado de tensão em repouso em maciço granular com superfície horizontal.

Sobre o ponto P, num plano horizontal, atua uma tensão vertical $\sigma_v = \gamma \cdot z$, que como se sabe, é uma tensão principal.

Estando o solo em condição de repouso, $\sigma_h = K_0 \cdot \sigma_v$; esta é também uma tensão principal e atua em um plano vertical.

O estado de tensão no ponto P fica definido com o conhecimento das direções destes dois planos e das tensões neles atuantes. Este estado é representado pelo círculo de diâmetro $\overline{PB_1}$, Figura 15.8.

As condições de equilíbrio plástico podem ser conhecidas traçando-se as envoltórias de resistência e estabelecendo-se os círculos que passam por P e que tangenciam as envoltórias.

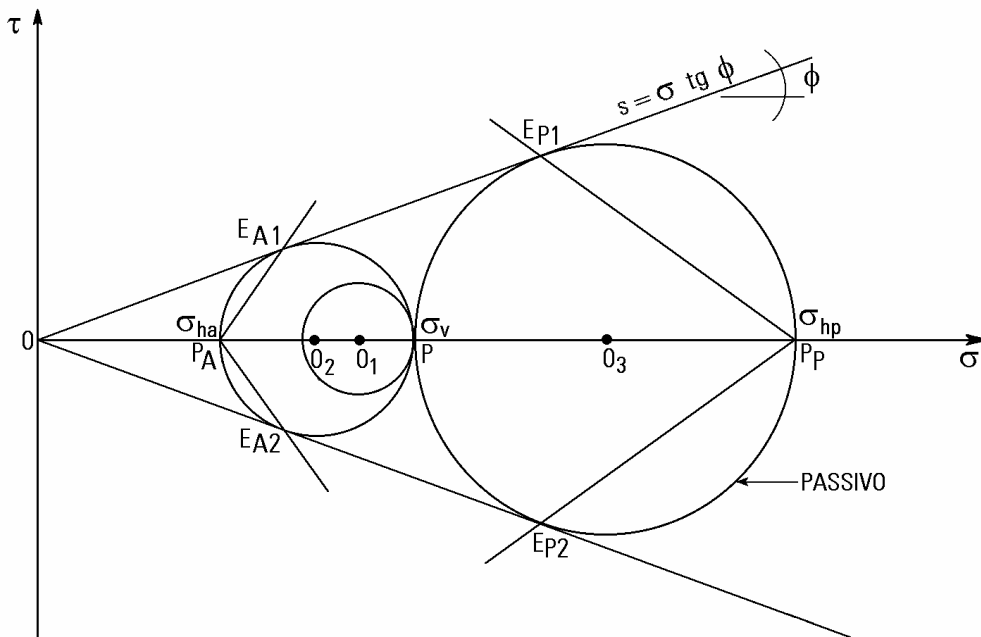


Figura 15.8 - Determinação dos coeficientes de empuxo em solos granulares.

O pólo do círculo no caso ativo (P_A) situa-se coincidente com a σ_{HA} e no caso passivo (P_p), com σ_{HP} . Unindo-se através de retas, P_A com D_1 e P_A com D_2 ficam determinadas as direções dos planos de ruptura para o caso ativo. Para o caso passivo una-se P_p a E_1 e P_p a E_2 .

Conforme já definido, a relação entre tensões efetivas horizontais e verticais constitui o coeficiente de empuxo. No caso ativo tem-se:

$$K_A = \frac{\sigma_{HA}}{\sigma_V}$$

Da Figura 15.8.

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{\sigma_v - \sigma_{HA}}{\sigma_v + \sigma_{HA}} = \frac{1 - \sigma_{HA}/\sigma_v}{1 + \sigma_{HA}/\sigma_v}$$

Donde

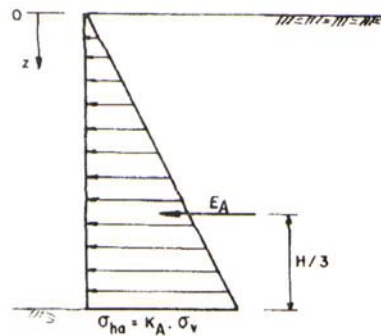
$$K_A = \frac{\sigma_{HA}}{\sigma_v} = \frac{1 - \operatorname{sen} \phi}{1 + \operatorname{sen} \phi} = \operatorname{tg}^2(45 - \phi/2)$$

$$K_p = \frac{\sigma_{HP}}{\sigma_v} = \frac{1 + \operatorname{sen} \phi}{1 - \operatorname{sen} \phi} = \operatorname{tg}^2(45 + \phi/2)$$

Estas relações permitem concluir que:

$$K_p = \frac{1}{K_A}$$

Observe que a variação das tensões horizontais é linear com a profundidade ($\sigma_{ha} = K_A \cdot \sigma_v$ e $\sigma_v = \gamma \cdot z$). O diagrama resultante será triangular (Figura 15.9) e o empuxo consistirá na integração das tensões laterais ao longo da altura.



$$E_A = \int_0^H \sigma_{ha} dz = \int_0^H K_A \cdot \gamma \cdot z \cdot dz$$

$$E_A = \frac{1}{2} K_A \cdot \gamma \cdot H^2$$

Figura 15.9 - Distribuição de esforços laterais e empuxo pela Teoria de Rankine

a.2 - Solos com coesão e atrito

Para esta condição, seja a Figura 15.10.

A tensão lateral poderá ser obtida como segue.

$$\frac{\overline{O_3 P_A}}{\overline{O_3 P}} = K_A$$

$$\overline{O_3 P_A} = c \cdot \cotg \phi + \sigma_{ha}$$

$$\overline{O_3 P} = c \cdot \cotg \phi + \sigma_v$$

Substituindo

$$c \cdot \cotg \phi + ha = (c \cdot \cotg \phi + \sigma_v) K_A$$

$$\sigma_{HA} = \sigma_v \cdot K_A + c \cdot \cotg \phi \cdot (K_A - 1)$$

porém

$$\cotg \phi \cdot (K_A - 1) = -2\sqrt{K_A}$$

Disso resulta

$$\sigma_{HA} = \sigma_v \cdot K_A - 2c\sqrt{K_A}$$

O empuxo resultante sobre um muro de altura H será:

$$E_A = \int_0^H \sigma_{ha} \cdot dz = \int_0^H (K_A \cdot \gamma \cdot z - 2c\sqrt{K_A}) dz$$

$$E_A = \frac{1}{2} K_A \cdot \gamma \cdot H^2 - 2c \cdot H \sqrt{K_A}$$

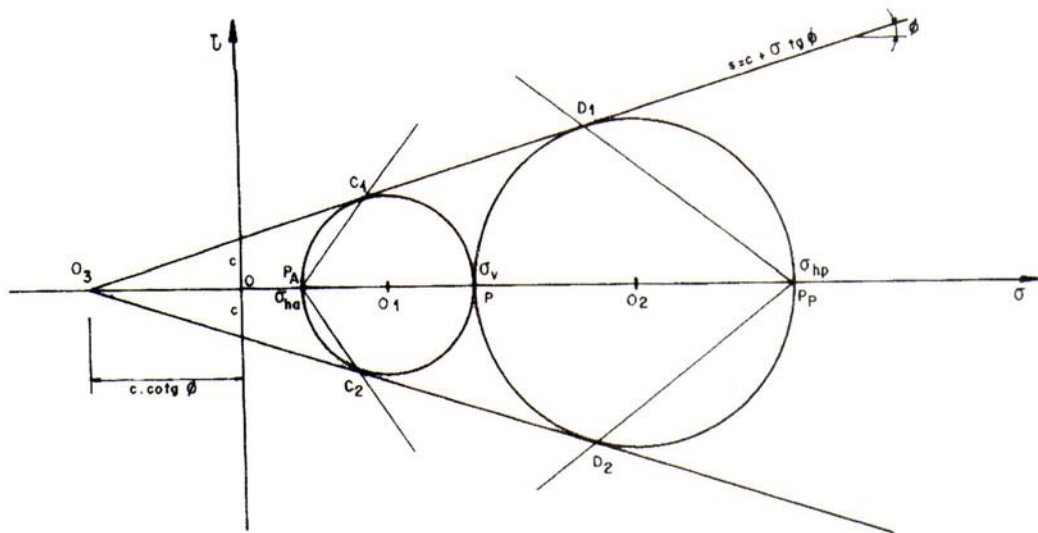


Figura 15.10 - Determinação da tensão lateral em solos com coesão e atrito.

É importante notar que quando o solo apresenta coesão, K_A já não se refere mais à relação entre σ_{ha} e σ_v . Caso se deseje um coeficiente que retrate a relação entre tensão horizontal e vertical, este poderá ser obtido como segue, porém deve-se notar que o coeficiente assim obtido (K_A^c) depende do nível de tensão e deixa de ter uma importância prática tão relevante quanto a que se observa para o caso de solos granulares.

$$\sigma_{ha} = \sigma_v \cdot K_A - 2c\sqrt{K_A}$$

$$K_A^c = \frac{\sigma_{ha}}{\sigma_v} = K_A - \frac{2c}{\sigma_v} \sqrt{K_A}$$

Em virtude do solo apresentar coesão, nem sempre será possível estabelecer uma condição de ruptura. Ela só ocorrerá para pontos em que a tensão vertical seja superior a um dado valor $\gamma \cdot z_0$. Neste caso limite, o valor de σ_h será nulo e o círculo ativo traçado será tangente à envoltória, conforme se representa na Figura 15.11.

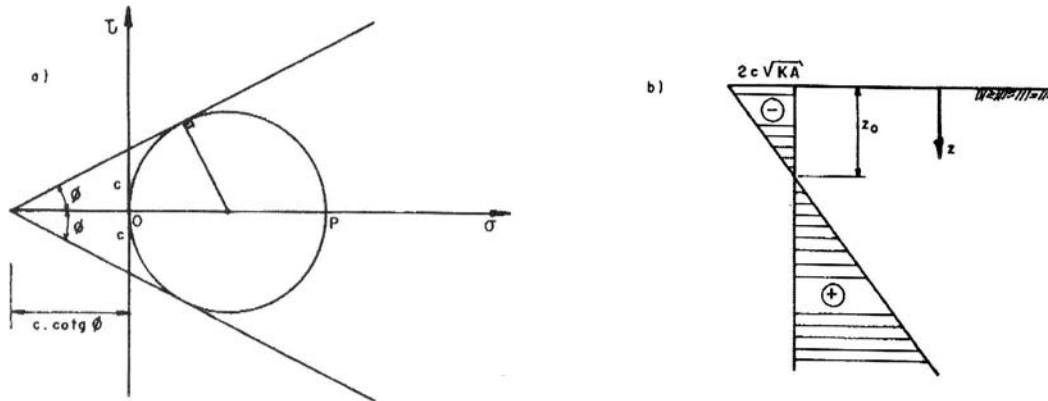


Figura 15.11 - Determinação da distância z_0 : a) círculo de Mohr; b) diagrama de esforços laterais.

O estado de plastificação só será atingido, no caso ativo, para profundidades iguais ou maiores que z_0 . Da expressão para σ_{ha} tem-se:

$$\sigma_{ha} = K_A \cdot \sigma_v - 2c\sqrt{K_A} = 0$$

$$K_A \cdot \gamma \cdot z_0 - 2c\sqrt{K_A} = 0$$

$$z_0 = \frac{2c}{\gamma} \sqrt{\frac{1}{K_A}}$$

Nem sempre, porém, o valor da coesão é constante com o tempo e disto resulta que nos cortes em argilas podem aparecer fendas de tração até a profundidade z_0 .

A presença da coesão possibilita manter um corte vertical, sem necessidade de escoramento, até uma altura (altura crítica-Hc) na qual o empuxo resultante é nulo:

$$E_A \frac{1}{2} K_A \cdot \gamma \cdot H^2 - 2c \cdot H \sqrt{K_A} = 0$$

$$H = Hc = \frac{4c}{\gamma} \sqrt{\frac{1}{K_A}}$$

Para solos puramente coesivos, Hc resulta:

$$Hc = \frac{4c}{\gamma}$$

A determinação das tensões laterais para o caso passivo segue desenvolvimento análogo ao apresentado para o caso ativo, resultando.

$$\sigma_{hp} = K_p \cdot \sigma_v - 2c\sqrt{K_p} = 0$$

onde:

$$K_p = \frac{1 + \operatorname{sen}\phi}{1 - \operatorname{sen}\phi} = \operatorname{tg}^2\left(45 + \phi/2\right)$$

b) Empuxos em maciços com superfície inclinada

Em maciços com superfície inclinada, σ_v e σ_h deixam de ser tensões principais. Sobre um plano paralelo à superfície do terreno a tensão vertical (σ_v) vale (vide talude infinito):

$$\sigma_v = \gamma \cdot z \cdot \cos i$$

As componentes normal e tangencial valerão:

$$\sigma = \gamma \cdot z \cdot \cos^2 i$$

$$\tau = \gamma \cdot z \cdot \operatorname{sen} i \cdot \cos i$$

A Figura 15.12 mostra a representação gráfica dos círculos de Mohr para solos granulares, com superfície inclinada.

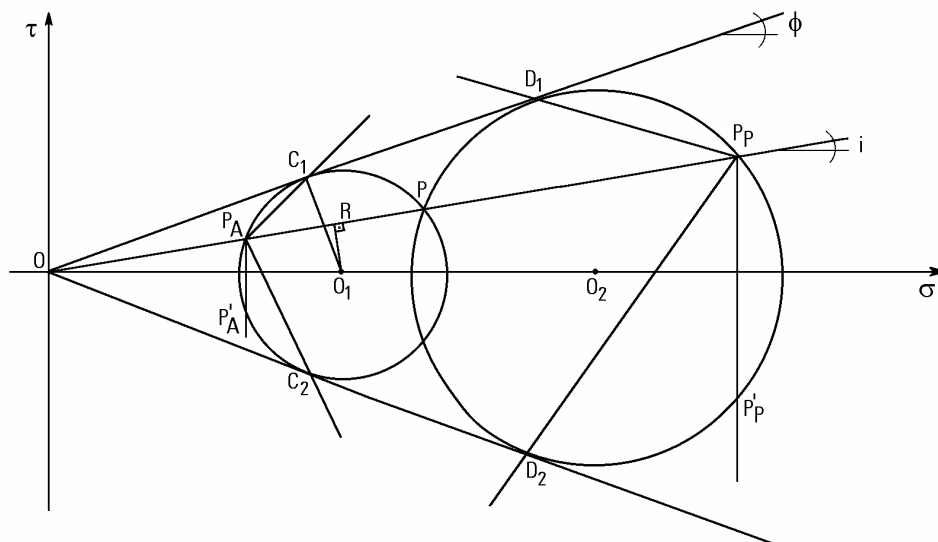


Figura 15 12 - Representação de Mohr para solos com atrito e superfície inclinada.

O segmento \overline{OP} representa a tensão vertical e os pólos ativo e passivo são, respectivamente P_A e P_p . As tensões num muro vertical serão conhecidas traçando-se pelo pólo uma vertical; a intersecção desta com o círculo (ponto P_A - caso ativo) fornece a tensão lateral procurada. Assim

$$\sigma_{ha} = \overline{OP'_A} = \overline{OP_A}$$

Analogamente, para o caso passivo:

$$\sigma_{hp} = \overline{OP'_p} = \overline{OP_p}$$

Da mesma forma que para superfície horizontal pode-se determinar algebricamente o valor da tensão lateral:

$$\sigma_{ha} = K_A \cdot \sigma_v = K_A \cdot \gamma \cdot z \cdot \cos i$$

Na Figura 15.12 tem-se:

$$K_A = \frac{\sigma_{ha}}{\sigma_v} = \frac{\overline{OP_A}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OR} - \overline{RP_A}}{\overline{OR} + \overline{RP}}$$

Porém,

$$\overline{RP_A} = \overline{RP} \quad ; \quad \overline{OR} = \overline{OO_1} \cdot \cos i$$

$$\text{e} \quad \overline{RP_A} = \sqrt{\overline{O_1P_A}^2 - \overline{O_1R}^2}$$

$$\overline{O_1P_A}^2 = \overline{O_1C_1}^2 = \overline{OO_1}^2 \cdot \sin^2 \phi = \overline{OO_1}^2 (1 - \cos^2 \phi)$$

$$\overline{O_1R}^2 = \overline{OO_1}^2 \cdot \sin^2 i = \overline{OO_1}^2 (1 - \cos^2 i)$$

Substituindo na relação inicial, tem-se:

$$\frac{\overline{OP_A}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OO_1}^2 \cdot \cos^2 i - \sqrt{\overline{OO_1}^2 (1 - \cos^2 \phi) - \overline{OO_1}^2 (1 - \cos^2 i)}}{\overline{OO_1}^2 \cdot \cos^2 i + \sqrt{\overline{OO_1}^2 (1 - \cos^2 \phi) - \overline{OO_1}^2 (1 - \cos^2 i)}}$$

Donde resulta

$$K_A = \frac{\cos i - \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}{\cos i + \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}$$

Esta é a expressão mais genérica para K_A . Observe que fazendo $i = 0$ resulta $K_A = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}$

e $\sigma_{ha} = K_A \cdot \gamma \cdot z$, expressões já deduzidas para taludes com superfície horizontal.

O empuxo resultante será:

$$E_A = \int_0^H K_A \cdot \sigma_v \cdot dz = \int_0^H K_A \cdot \gamma \cdot z \cdot \cos i \, dz$$

$$E_A = \frac{1}{2} \cdot K_A \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \cos i$$

O empuxo terá a direção da superfície do terreno e dada a distribuição triangular de esforços, atuará a um terço da base do muro (Figura 15.13).

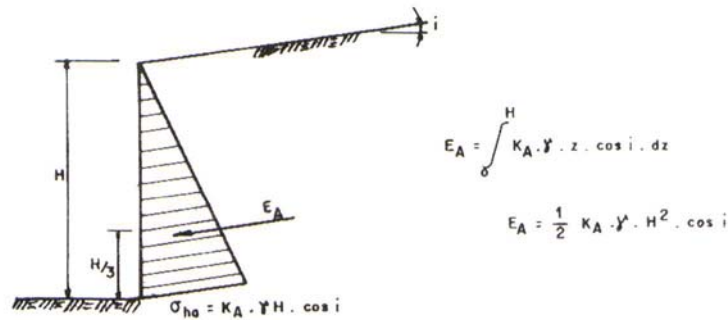


Figura 15-13 - Diagrama e direção do empuxo em maciços com superfície inclinada.

Para o caso de empuxo passivo, raciocínio análogo conduzirá à seguinte expressão para o coeficiente de empuxo (K_p):

$$K_p = \frac{\cos i + \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}{\cos i - \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}$$

A Figura 15.14 ilustra a construção gráfica necessária para a determinação dos esforços laterais em maciços com coesão e atrito e superfície inclinada.

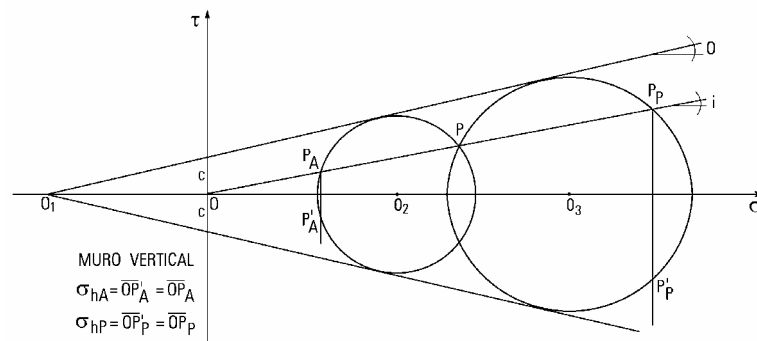


Figura 15.14 - Representação de Mohr para solos com coesão e atrito e superfície inclinada

A tensão vertical é dada por \overline{OP} e os pólos ativo e passivo são P_A e P_p , respectivamente. No caso de muro vertical as tensões laterais serão dadas por $\overline{OP_A}$ (ativo) e $\overline{OP_P}$ (passivo).

5. MÉTODO DE COULOMB

O método de Coulomb para cálculo dos empuxos de terra foi enunciado em 1776. Enquadra-se na filosofia do Teorema de Região Superior (TRS) da teoria da plasticidade, que estabelece o equilíbrio de uma massa de solo, se para um deslocamento arbitrário, o trabalho realizado pelas solicitações externas for menor do que o das forças internas. Em caso negativo a massa estará em condição de instabilização ou de plastificação.

O método de Coulomb admite como básicas as seguintes hipóteses:

- superfície de deslizamento plana, passando pela base da estrutura de suporte;
- liberdade de movimentação da estrutura capaz de mobilizar todo o atrito existente entre ela e o solo arrimado.

Esta última hipótese permite conhecer a direção do empuxo. Nenhuma referência é feita, entretanto, ao seu ponto de aplicação ou à forma da distribuição das tensões horizontais sobre o muro. O fato de conhecer-se a direção do empuxo implica que, para os casos de carregamento externos mais

simples, é possível determinar o empuxo através de construções gráficas. As condições de equilíbrio, para um conjunto de forças, obrigam que estas forças concorram para um mesmo ponto ou forneçam um polígono fechado.

O cálculo do empuxo é efetuado estabelecendo-se as equações de equilíbrio das forças atuantes sobre uma cunha de deslizamento hipotética. Uma das forças atuantes é o empuxo que no estado ativo corresponde à reação da estrutura de suporte sobre a cunha e, no passivo, à força que a estrutura de arrimo exerce sobre ela.

O empuxo ativo será o máximo valor dos empuxos determinados sobre as cunhas analisadas; o passivo, o mínimo. A ativação pode ser entendida como o fim de um processo de expansão que se desencadeia no solo a partir de uma posição em repouso. Isto significa que o valor do empuxo vai diminuindo, com a expansão, até que se atinge um valor crítico, situado no limiar da ruptura, ou da plastificação.

Quando as análises de equilíbrio são efetuadas para as diversas cunhas hipotéticas supõe-se que este limiar da ruptura tenha sido alcançado em todas elas, ou seja, todas atingiram a ativação. Portanto o maior valor de empuxo estabelecido na análise destas cunhas será o crítico, pois no processo de ativação ele será atingido em primeiro lugar, sendo por conseguinte o empuxo ativo. Isto corresponde dizer que o empuxo ativo é um ponto de máximo dentre os mínimos valores determináveis de empuxo. Um fato inverso ao descrito nestes dois parágrafos ocorrerá para o caso passivo.

Uma outra forma de proceder para calcular os empuxos de terra seria o de estabelecer uma expressão matemática que descrevesse o equilíbrio de forças e encontrar o ponto máximo (empuxo ativo) ou de mínimo (empuxo passivo). Nem sempre porém existem facilidades geométricas e de carregamento que permitam esta linha de ação. Tendo em vista a filosofia do Teorema da região Superior, no qual se enquadra, o processo de Coulomb tem como princípio a comparação entre os trabalhos de forças externas e o de forças internas. Isto equivale a um equilíbrio estático de forças, para um dado deslocamento. Assim, nos casos de geometria mais simples, será possível estabelecer uma equação geral para o problema e encontrar o seu valor máximo, ou mínimo, correspondente às situações ativa e passiva respectivamente. Em seguida serão fornecidos os casos em que esta abordagem pode ser possível.

a) Solução analítica do método de Coulomb para solos granulares.

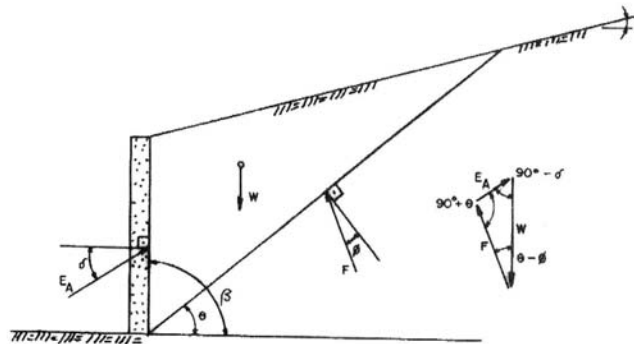


Figura 15.15 - Cálculo do empuxo em solos granulares pelo método de Coulomb.

Do triângulo de forças tem-se:

$$\frac{E_a}{\text{sen}(\theta - \phi)} = \frac{W}{\text{sen}(90 + \phi)} \quad E_a = \frac{W \cdot \text{sen}(\theta - \phi)}{\text{sen} \phi}$$

O valor de E_a máximo será obtido fazendo-se:

$$\frac{\partial E_a}{\partial \theta} = 0, \text{ que resulta}$$

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma \cdot H^2 \cdot K_A, \text{ onde } K_A \text{ ser\`a:}$$

$$K_A = \left[\frac{\operatorname{cosec} \beta \cdot \operatorname{sen} (\beta - \phi)}{\sqrt{\operatorname{sen} (\beta - \delta)} + \sqrt{\frac{\operatorname{sen} (\phi + \delta) \cdot \operatorname{sen} (\phi - i)}{\operatorname{sen} (\beta - i)}}} \right]^2$$

A Tabela 15.2 extraída de Tschebotarioff (in Leonards, 1962) apresenta resultados do coeficiente de empuxo ativo, segundo Coulomb. Nessa tabela são consideradas a variação das inclinações do tardo do muro (β) e da superfície terreno (i), bem como do ângulo de atrito do solo (ϕ') e desprezado o atrito solo-muro ($\delta = 0^\circ$). Ressalte-se que para o caso do empuxo ativo, o atrito solo muro introduz pouca variação no coeficiente de empuxo. Por exemplo, para muro vertical ($\beta = 90^\circ$), superfície do terreno horizontal ($i = 0^\circ$) e $\phi' = 30^\circ$, K_A varia entre 0,33, para $\delta = 0$ e 0,31 para $\delta = 30^\circ$; para $\beta = 100^\circ$; $i = 12^\circ$; $\phi = 30^\circ$, tem-se $K = 0,48$ ($\delta = 0$) e $K = 0,47$ ($\delta = 30^\circ$).

Tabela 15.2 - Coeficientes de empuxo ativo (K_A) pela Teoria de Coulomb, considerando atrito solo-muro nulo ($\delta = 0$)

| | | | | | | + 12° | + 30° |
|-------------------|---------------------|------|------|------|---------|---------|-------|
| i = | | -30° | -12° | ± 0 | 1 : 4,7 | 1 : 1,7 | |
| $\phi = 20^\circ$ | $\beta = 110^\circ$ | | 0,57 | 0,65 | 0,81 | | |
| | $\beta = 100^\circ$ | | 0,50 | 0,55 | 0,68 | | |
| | $\beta = 90^\circ$ | | 0,44 | 0,49 | 0,60 | | |
| | $\beta = 80^\circ$ | | 0,38 | 0,42 | 0,50 | | |
| | $\beta = 70^\circ$ | | 0,32 | 0,35 | 0,40 | | |
| $\phi = 30^\circ$ | $\beta = 110^\circ$ | 0,34 | 0,43 | 0,50 | 0,59 | 1,17 | |
| | $\beta = 100^\circ$ | 0,30 | 0,36 | 0,41 | 0,48 | 0,92 | |
| | $\beta = 90^\circ$ | 0,26 | 0,30 | 0,33 | 0,38 | 0,75 | |
| | $\beta = 80^\circ$ | 0,22 | 0,25 | 0,27 | 0,31 | 0,61 | |
| | $\beta = 70^\circ$ | 0,18 | 0,20 | 0,21 | 0,24 | 0,50 | |
| $\phi = 30^\circ$ | $\beta = 110^\circ$ | 0,27 | 0,33 | 0,38 | 0,43 | 0,59 | |
| | $\beta = 100^\circ$ | 0,22 | 0,26 | 0,29 | 0,32 | 0,43 | |
| | $\beta = 90^\circ$ | 0,18 | 0,20 | 0,22 | 0,24 | 0,32 | |
| | $\beta = 80^\circ$ | 0,13 | 0,15 | 0,16 | 0,17 | 0,24 | |
| | $\beta = 70^\circ$ | 0,10 | 0,10 | 0,11 | 0,12 | 0,16 | |

O valor do empuxo passivo, analogamente, ser\`a:

$$E_p = 0,5 \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot K_p$$

$$K_p = \left[\frac{\operatorname{cosec} \beta \cdot \sin(\beta + \phi)}{\sqrt{\sin(\beta - \delta)} - \sqrt{\frac{\sin(\phi + \delta) \cdot \sin(\phi + i)}{\sin(\beta - i)}}} \right]^2$$

b) Solução gráfica

A determinação dos empuxos, inclusive para geometrias mais complexas, pode ser feita através de processos gráficos. Estes processos são todos semelhantes entre si, podendo-se citar o processo direto e o de Cullman. No que segue mostraremos a construção referente ao processo direto, considerando um exemplo.

EXEMPLO 15.1 - Determinar graficamente, pelo método de Coulomb, o empuxo ativo sobre o muro de arrimo esquematizado na Figura 15.16. O muro tem 8,0m de altura, $\delta = 20^\circ$, e o terrapleno apresenta $\gamma = 1,80 \text{ tf/m}^3$, $s = 1 + \sigma \text{ tg } 25^\circ$ e $i = 1:4$.

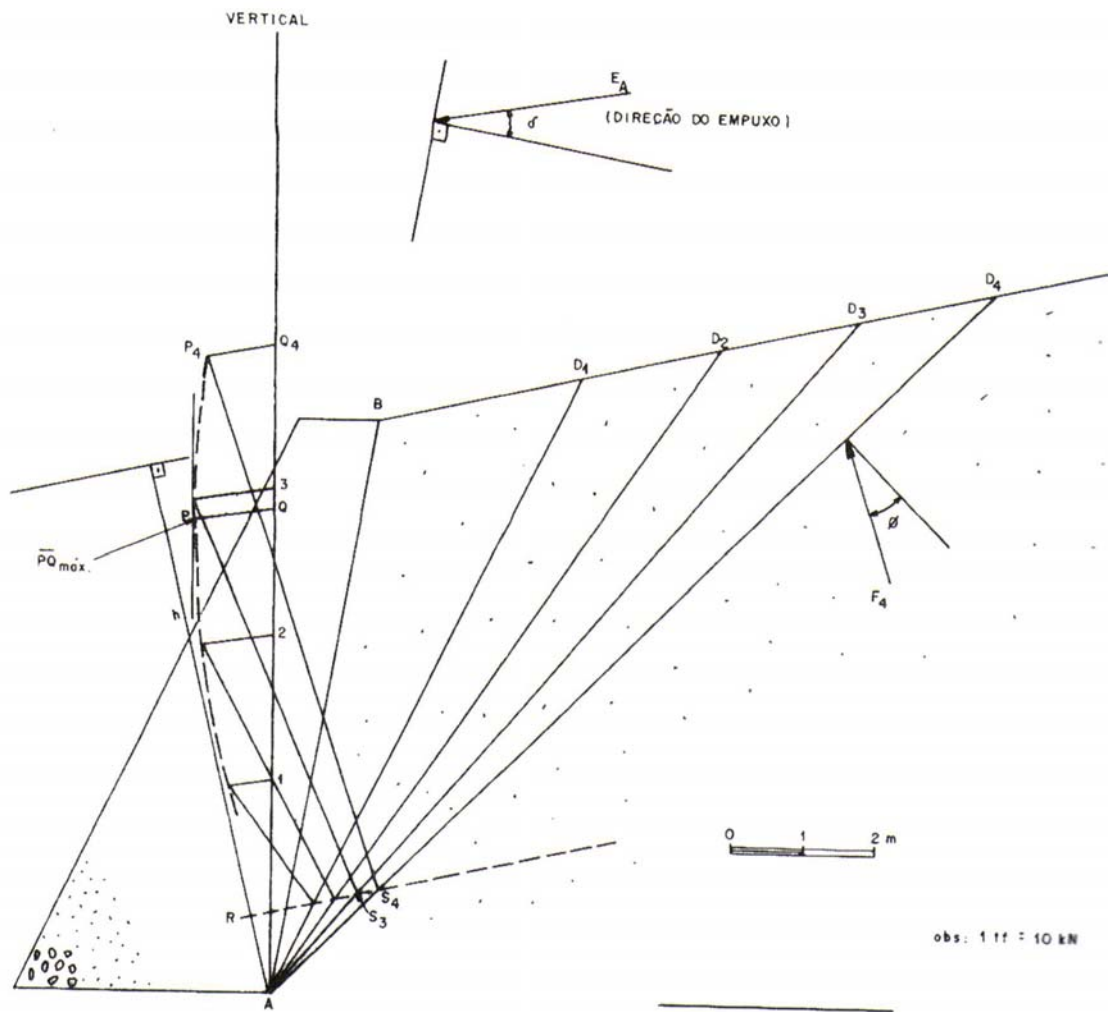


Figura 15.16 - Determinação do empuxo pelo processo direto-solo com coesão e atrito.

Resolução

Uma cunha genérica ABD terá seu peso dado por:

$$W = \frac{1}{2} \gamma \cdot h \cdot \overline{BD}$$

Escolhendo como escala de forças $\frac{1}{2} \gamma \cdot h$ resulta para o peso $\vec{W} = \overline{BD}$ que tem direção vertical.

a) numa vertical por A marca-se o segmento \overline{AQ} que representa o peso da cunha na escala $\frac{1}{2} \gamma \cdot h$.

b) a força de coesão valerá $C = c \cdot \overline{AD}$. Na escala de forças adotada

$$\frac{C}{\frac{1}{2} \gamma \cdot h} = \frac{2c}{\gamma} \cdot \frac{\overline{AD}}{h}$$

O termo $2c/\phi$ tem unidade de comprimento, é constante para todas as cunhas e pode ser representado pelo segmento \overline{AR} . Uma paralela à superfície do terreno por R determinará o ponto S sobre AD. O segmento \overline{AI} representa a força de coesão na escala adotada.

$$\frac{\overline{AR}}{h} \cdot \frac{\overline{AS}}{\overline{AD}} \rightarrow \overline{AS} = \frac{\overline{AR} \cdot \overline{AD}}{h} = \frac{2c}{\gamma} \frac{\overline{AD}}{h}$$

$$\overline{AS} + \frac{c \cdot \overline{AD}}{\frac{1}{2} \gamma \cdot h}$$

c) por S traça-se uma paralela à força de atrito F.
 d) por Q tira-se uma paralela ao empuxo E.
 e) a intersecção destas duas retas, ponto J, determina o polígono de forças QASPG, que permite encontrar os módulos de $E_A = \overline{PQ}$, e de $F = \overline{SP}$.

f) repete-se o processo para várias cunhas, procurando-se estabelecer a envoltória dos hipotéticos empuxos. O valor \overline{PQ}_{\max} representará o empuxo ativo.

g) O empuxo ativo será:

$$E_A = \frac{1}{2} \gamma \cdot h \cdot \overline{PQ}_{\max}$$

No exemplo em questão, tem-se:

$$\frac{2}{\gamma} = \frac{2 \cdot 1}{1,80} = 1,11 = \overline{AR}$$

$$E_A = 6,70 * 1,2 = 8,04 \text{ tf/m} = 80,4 \text{ kN/m}$$

Havendo percolação de água no maciço, a construção gráfica terá a forma (Figura 15.17).

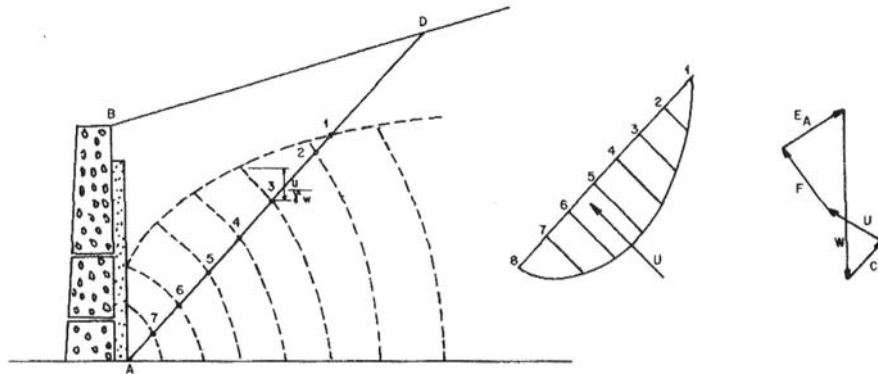


Figura 15.17 - Cálculo do empuxo em maciços com percolação de água.

Agora, além das forças W , C , F e E_a tem-se a força U , resultante das pressões neutras hidrodinâmicas que agem sobre a cunha. Para computar esta força toma-se o valor da carga piezométrica nos pontos em que a superfície de deslizamento intercepta as linhas equipotenciais e marca-se este valor sobre uma linha de base, normal à cunha, neste ponto. Em seguida, traça-se o diagrama resultante. A força U , de módulo equivalente à área do diagrama, atua no centro de gravidade da figura e faz um ângulo reto com a linha de deslizamento.

6. ASPECTOS GERAIS QUE INFLUENCIAM NA DETERMINAÇÃO DO EMPUXO

a) Influência da pressão neutra

Considere-se a Figura 15.18 onde um elemento de arrimo, de paramento vertical, suporta as tensões horizontais exercidas por um meio homogêneo, de superfície horizontal com massas específicas natural e submersa ϕ e ϕ' , respectivamente, e de resistência $s = \sigma \operatorname{tg} \phi'$.

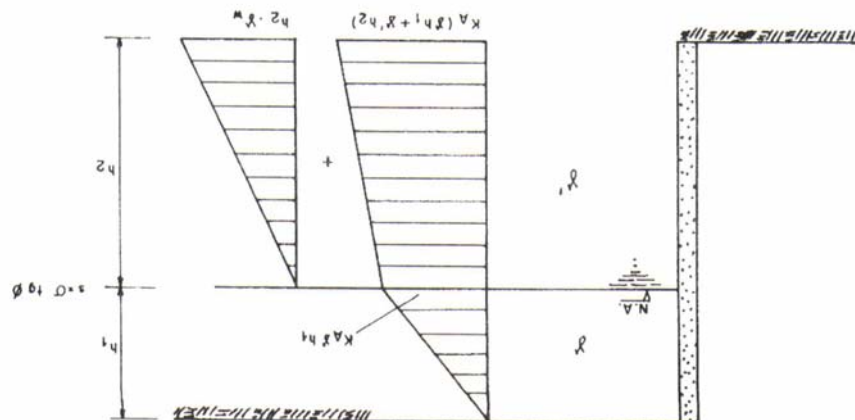


Figura 15.18 - Influência da pressão neutra no cálculo do empuxo

Lembrando que o coeficiente de empuxo é sempre referente a tensões efetivas, a presença da pressão neutra resultante de um NA estático é considerada como uma parcela que se soma aos valores de empuxos obtidos em termos de tensões efetivas.

$$E_A = K_A (\gamma \cdot h_1 + \gamma' \cdot h_2) + \gamma_w \cdot h_2$$

b) Influência de sobrecargas aplicadas à superfície do terreno

Esforços laterais devidos a sobrecargas aplicadas à superfície do terreno nem sempre são de fácil avaliação. Alguns tipos de sobrecargas (uniformemente distribuídas, lineares, etc.) podem ser consideradas, bastando incluí-las nos polígonos de forças das construções gráficas. Algumas medidas efetuadas comprovam a aplicabilidade das fórmulas da Teoria de Elasticidade, entretanto são necessárias algumas correções empíricas para adequá-las aos valores reais medidos. Um dos aspectos a considerar e que requer correção refere-se à rigidez da estrutura.

Vários autores sugerem aplicar para carregamentos futuros, um fator multiplicativo de 2 nas expressões da Teoria da Elasticidade, para levar em conta a possível restrição a deformações imposta pela estrutura.

Apresentam-se a seguir alguns casos mais comuns de sobrecargas.

b.1 - Sobrecarga uniformemente distribuída

Estas sobrecargas são tomadas como uma parcela constante que se soma ao valor do empuxo. Assim, as tensões horizontais devidas a uma sobrecarga q na superfície do terreno resultam, em qualquer ponto do meio, um valor constante: $K \cdot q$. O valor de K será K_A , K_o ou K_p conforme sejam os deslocamentos da estrutura (Figura 15.19).

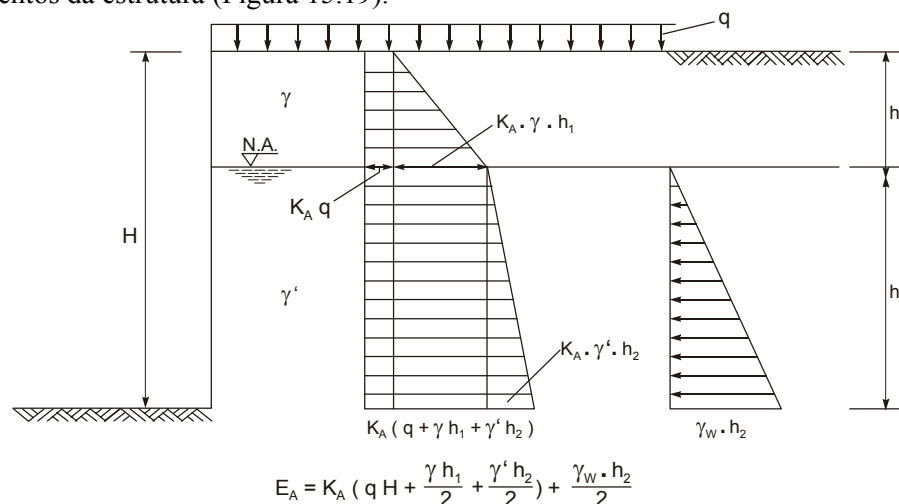


Figura 15.19 - Influência de sobrecarga uniforme distribuída na superfície do terreno.

Nas construções gráficas de Coulomb, pode-se somar a resultante devida à sobrecarga, ao peso da cunha (W), com vistas a obter o efeito acumulado de empuxo devido ao solo e à sobrecarga.

b.2 - Sobrecarga linear uniforme paralela ao muro

Os processos gráficos do método de Coulomb permitem determinar a contribuição para as tensões laterais desse tipo de sobrecarga. Neste caso, ao peso da cunha soma-se o valor da carga (Figura 15.20), caso ela esteja situada no interior da cunha.

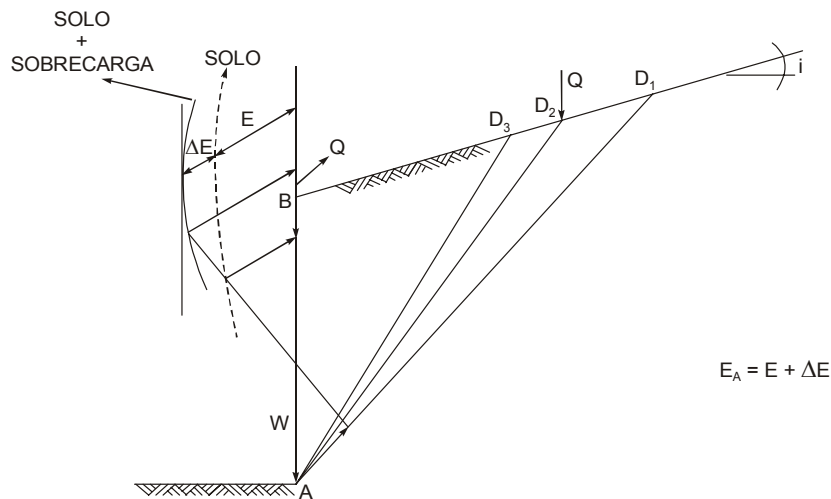


Figura 15.20 - Influência de sobrecarga linear

Ao considerar-se a cunha ABD não há interferência da sobrecarga Q . Quando Q situa-se imediatamente à esquerda de D_2 , deve-se adicioná-la ao valor de W . Todas as outras cunhas definidas por pontos situados à direita de D_2 , tal como D_1 , sofrem a mesma consideração. Em torno do ponto D_2 a envoltória dos hipotéticos empuxos sofre uma inflexão.

Se a carga estiver, situada muito distante do ponto B , a sua influência sobre o empuxo será insignificante. Ao definir-se a linha envoltória é possível estabelecer uma distância a partir da qual a influência de Q deixa de ser significativa.

A Figura 15.21 esquematiza a utilização de fórmulas da Teoria da Elasticidade, nas quais já se encontra embutido o fator multiplicativo de $\underline{2}$.

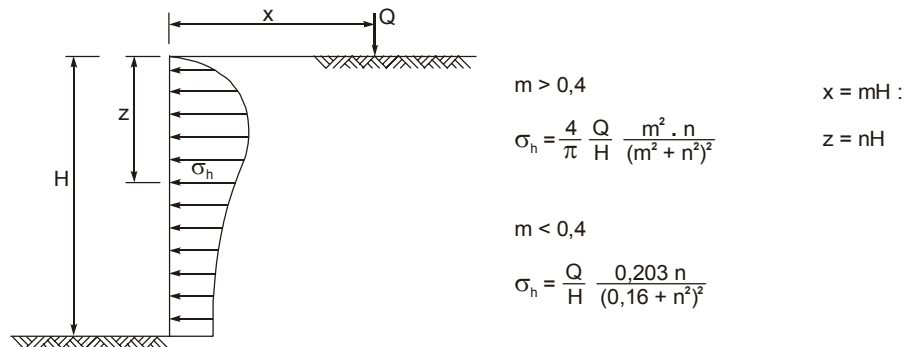


Figura 15.21 - Acréscimo de tensão lateral devido a uma sobrecarga linear

b.3 - Sobrecarga concentrada

Também para sobrecarga concentrada é possível determinar tensões laterais através de fórmulas da Teoria da Elasticidade adaptadas. A Figura 15.22 esquematiza os parâmetros necessários para o cálculo.

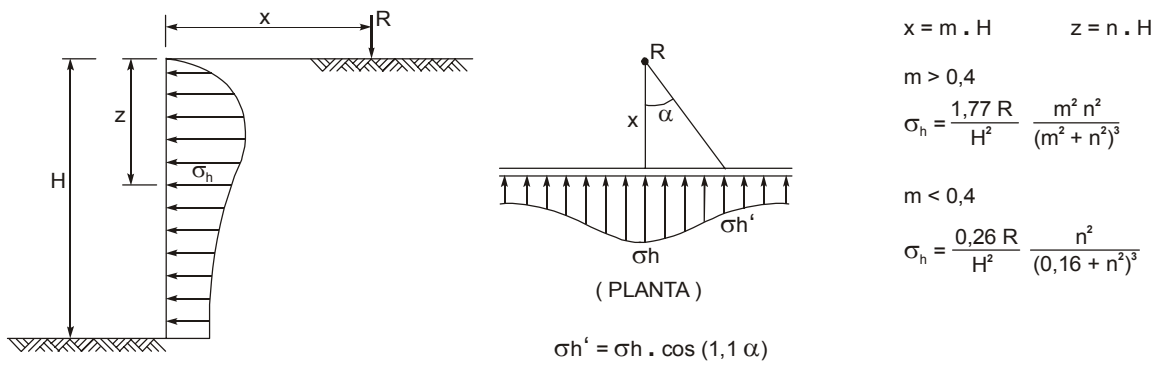


Figura 15.22 - Influência de carga concentrada sobre o esforço lateral em arrimos.

b.4 - Sobrecarga retangular (sapata corrida)

As sobrecargas retangulares são também analisadas através dos processos gráficos da Teoria de Coulomb. A Figura 15.23 esquematiza a utilização da expressão baseada na Teoria da Elasticidade, na qual já se encontra embutido o fator multiplicativo 2.

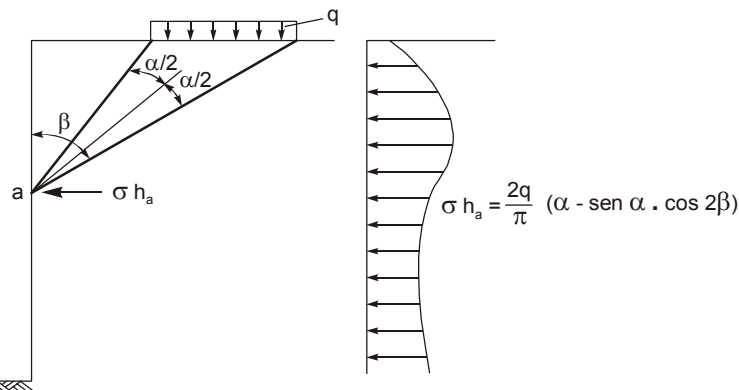


Figura 15.23 - Esforços laterais devido à sobrecarga retangular

A expressão fornece o valor da tensão lateral (σ_h) num ponto a sobre a estrutura de arrimo. A partir desta expressão estabelece-se o diagrama das tensões horizontais, cuja área fornece o valor do empuxo provocado pela sobrecarga.

Outra maneira para considerar o efeito de sobrecargas uniformes consiste em empregar o ábaco de Newmark desenvolvido para o cálculo de tensões laterais. O processo de utilização é semelhante ao mostrado para acréscimo de tensões verticais no Capítulo VII - Volume 1.

Soluções baseadas na Teoria da Elasticidade para os mais variados tipos de carregamento podem ser encontradas em Poulos e Davis (1974).

c) Influência do atrito entre o solo e o muro

A influência do atrito entre o solo e o muro pode ser evidenciada observando-se que quando o muro move-se, o solo que ele suporta expande-se ou é comprimido conforme seja o estado ativo ou passivo. No primeiro caso o solo apresenta uma tendência de descer ao longo da parede que, se impedida, origina tensões tangenciais ascendentes que suportam em parte a massa de solo deslizante. Alivia-se, assim, o valor do empuxo sobre o muro. No caso passivo ocorre simplesmente o contrário.

O método de Rankine, que desconsidera o atrito entre o solo e o muro, fornece soluções do lado da segurança. O de Coulomb considera o atrito e fornece soluções mais realistas.

O emprego de uma ou outra teoria está associado, inclusive, como já foi referido, à geometria do problema. As obras dimensionadas através do método de Rankine serão mais caras pois, como se sabe, este método fornece valores mais conservativos em face de não considerar o atrito entre o solo e o muro. Por outro lado esta teoria é de extrema simplicidade e portanto menos trabalhosa do que a solução de Coulomb.

A presença do atrito, além de reduzir o valor do empuxo, provoca a sua inclinação. Isto torna os muros mais estáveis já que a componente horizontal do empuxo está diretamente relacionada com a estabilidade do muro quanto a escorregamento e tombamento. O ângulo de atrito entre solo e muro depende fundamentalmente do ângulo de atrito do solo. Na falta de um valor específico, recomenda-se adotar para ϕ um valor situado entre:

$$\frac{\phi'}{3} < \delta < \frac{2}{3} \phi'$$

d) Ponto de aplicação do empuxo

A teoria de Rankine, admitindo uma distribuição hidrostática de tensões, fixa o ponto de aplicação do empuxo a 1/3 da altura, medida a partir da base. A teoria de Coulomb nada estabelece a respeito.

Entretanto, quando se utilizam construções gráficas pode-se, através de um procedimento empírico, determinar o ponto de aplicação de E. Para a cunha crítica determina-se o seu centro de gravidade e traça-se por aí uma reta paralela à superfície de escorregamento. A interseção desta paralela com o muro será o ponto onde deve aplicar-se o empuxo (Figura 15.24).

A Figura 15.24 b ilustra a determinação do ponto de aplicação da parcela de empuxo devido a uma sobrecarga linear (Q), paralela ao muro.

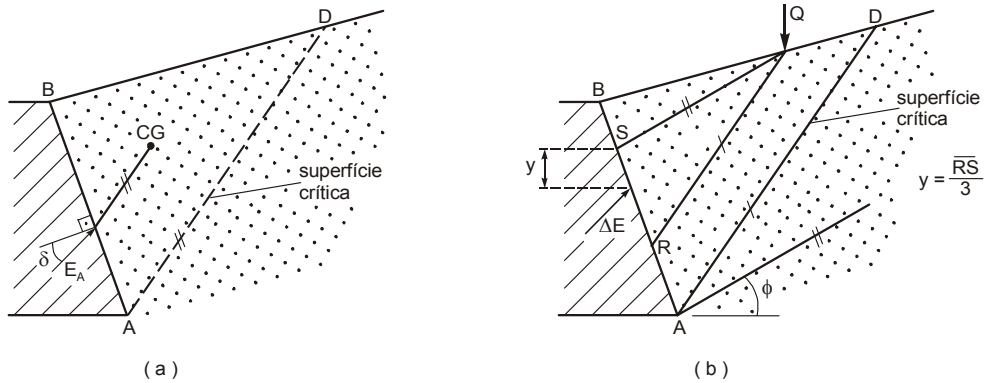


Figura 15.24 - Determinação do ponto de aplicação do empuxo: a) devido ao solo; b) devido à uma sobrecarga linear.

A partir da construção gráfica (processo direto, por exemplo), o valor de ΔE pode ser computado como $\Delta E = E' - E$, onde E' refere-se ao empuxo devido ao solo e à sobrecarga e E refere-se ao empuxo devido somente ao solo. Conhecendo-se os valores de E e ΔE e seus pontos de aplicação, pode-se estabelecer o ponto de aplicação do empuxo total E' .

e) Fendas de tração

Desde que haja coesão no solo, o estado de tensão que provoca sua ativação provocará também o aparecimento de fendas de tração.

A superfície do terreno o valor de σ_v será nulo e a tensão horizontal negativa. Como o solo não resiste tensões de tração (tensões negativas) formam-se, na sua superfície, fendas. Estas fendas irão até uma profundidade em que a tensão horizontal anula-se, ou seja:

$$\sigma_{ha} = 0 = K_A \cdot \gamma \cdot Z_o - 2c \sqrt{K_A}$$

$$Z_o = \frac{2c}{\gamma} \sqrt{K_A}$$

Supondo que o solo consiga suportar tração, então (Figura 15.25).

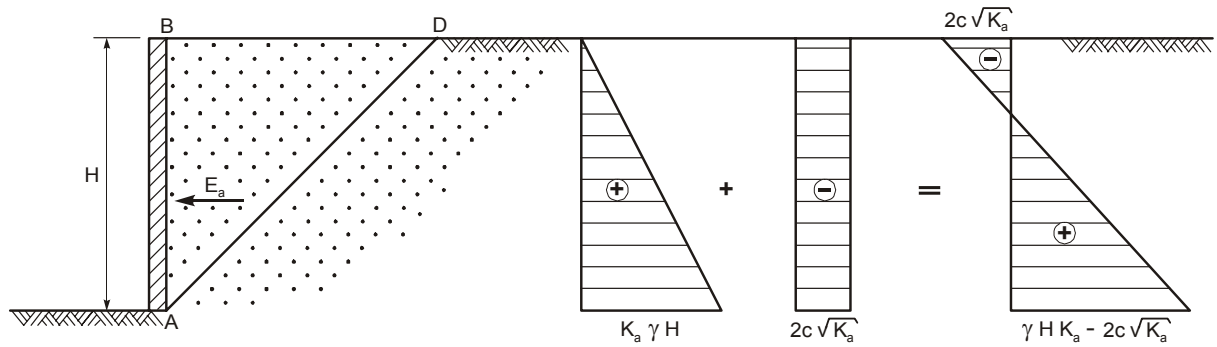


Figura 15.25 - Empuxo em solo com coesão, supondo que resista tração.

Como o solo não resiste às tensões de tração aparecerão fendas até a profundidade z_0 ; o solo acima desta cota contribui para o empuxo como se fosse uma sobrecarga (Figura 15.26).

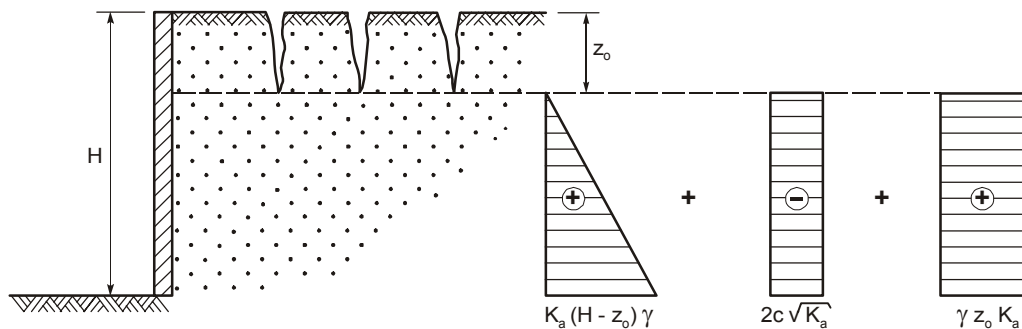


Figura 15.26 - Empuxos em maciços com coesão: desenvolvimento de fendas de tração.

f) Determinação do empuxo ativo em estruturas de paredes irregulares

Seja a Figura 15.27 em que um muro de arrimo de parede angulosa sustenta um maciço de altura H .

O problema pode ser dividido em duas partes isoladas e as componentes do empuxo E_1 e E_2 serão vetorialmente somadas, permitindo inclusive determinar o ponto de aplicação do empuxo resultante E .

O cálculo de E_1 é efetuado considerando um muro de superfície inclinada e de altura h_1 . O de E_2 , considerando um muro fictício de altura H e tardo AD . Toma-se a parcela do diagrama de tensões correspondente ao segmento \overline{RD} de espessura h_2 , e no centro de gravidade aplica-se o valor de E_2 .

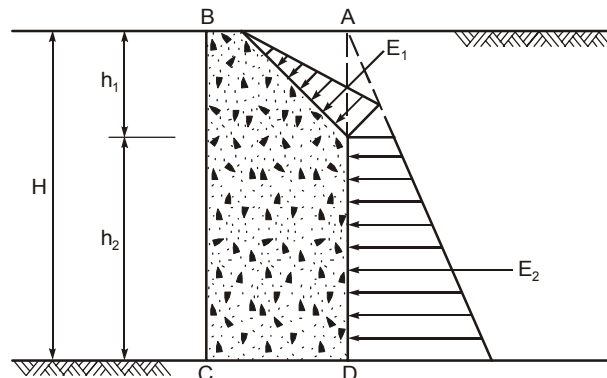


Figura 15.27 - Determinação dos empuxos em muros com paredes angulosas.

g) Determinação do empuxo em solos estratificados

Imagina-se a condição imposta pela Figura 15.28 onde uma estrutura de suporte sustenta tensões horizontais provocadas por um maciço estratificado.

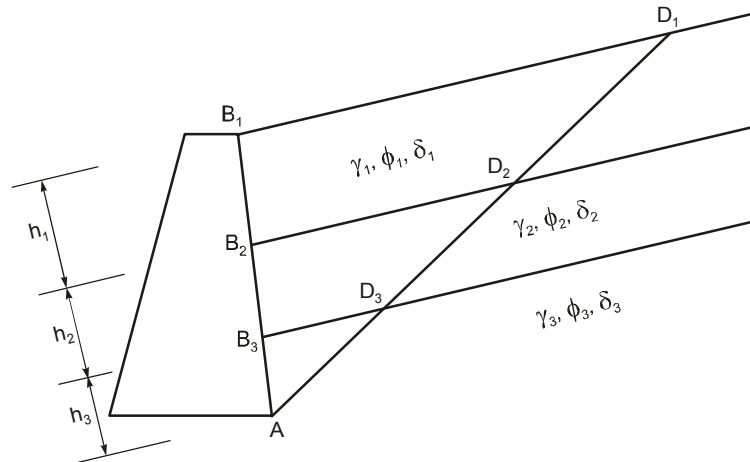


Figura 15.28 - Cálculo dos empuxos em maciços estratificados

O cálculo do empuxo atuante sobre o elemento de suporte pode, a grosso modo, ser feito por camadas. Considera-se inicialmente a camada superior onde a figura geométrica $B_1B_2D_2D_1$ aplica sobre o segmento B_1B_2 de espessura h_1 , a parcela E_1 ponto de aplicação e a direção de E_1 , pode ser determinado por um processo conhecido.

Em seguida analisa-se a figura $B_2B_3D_3D_2$ que atua sobre o segmento B_2B_3 de espessura h_2 . Despreza-se o atrito entre os estratos e a contribuição do atrito existente entre o solo e o muro fora da região considerada. O efeito da camada superior é analisado como se fora uma sobrecarga.

Aplica-se o mesmo raciocínio para as camadas subsequentes.

Quando, apenas a massa específica das camadas for diferente a análise pode ser conduzida pelos processos gráficos da teoria de Coulomb.

7. APLICABILIDADE DAS TEORIAS CLÁSSICAS

A teoria de Rankine, como ficou definido, aplica-se ao caso em que o tardoz do muro é vertical e liso. Esta condição ideal é, às vezes, conseguida em estacas prancha metálicas ou quando o muro com parede vertical está sujeito a esforços sísmicos.

Principalmente quando o muro tem tardoz inclinado, tem-se utilizado a simplificação de se passar pelo pé do muro um plano vertical imaginário, considerando que a cunha de solo, que se situa entre o muro e este plano, contribua com seu peso para a estabilidade do conjunto e que o solo à direita deste plano esteja nos estados de equilíbrio de Rankine. O mesmo ocorre com frequência em muros de flexão que têm sua base penetrando no maciço (Figura 15.29).

Quando o muro se desloca, desenvolve-se a superfície de ruptura \overline{ad} . O solo situado à esquerda de \overline{ab} permanece no estado elástico, desenvolvendo-se o estado de equilíbrio plástico, somente dentro da cunha $abcd$, desde que o ângulo θ seja suficiente para que se desenvolva a superfície \overline{ab} sem interferência com o muro.

O peso de solo situado sobre o muro contribui então para a estabilidade do muro e o empuxo é calculado sobre a superfície \overline{ac} , dado que o prisma acd encontra-se no estado de equilíbrio limite de Rankine. Em solos arenosos, para que tal ocorra é necessário que:

$$\theta \geq \frac{1}{2} \left[90^\circ + i - \phi' - \arcsen \left(\frac{\text{sen } i}{\text{sen } \phi'} \right) \right]$$

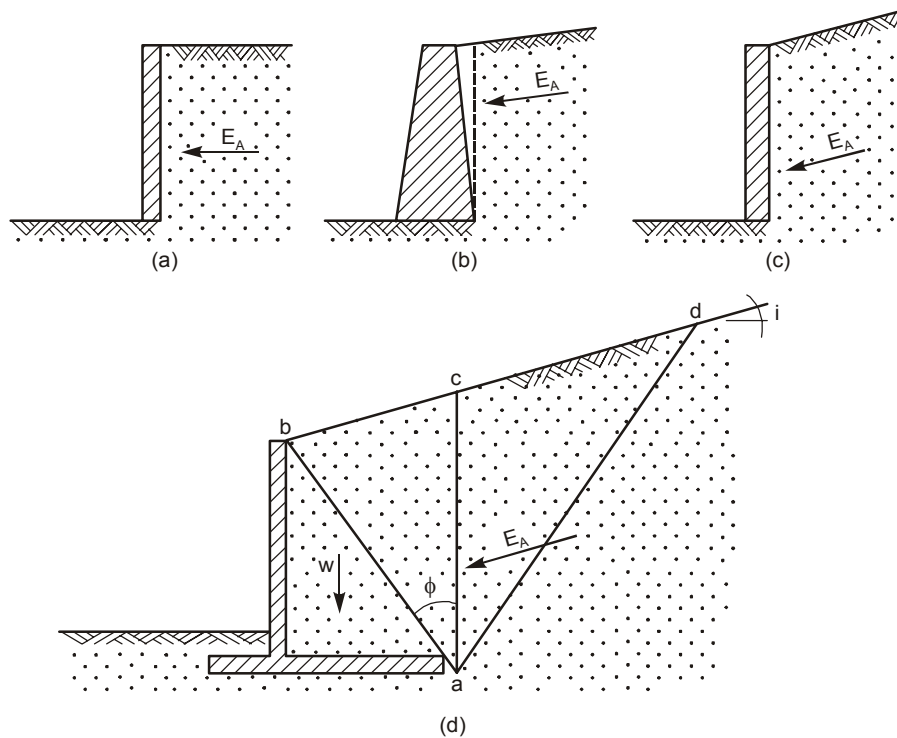


Figura 15.29 - Aplicação da teoria de Rankine: a) Muro vertical com talude horizontal; b) Muro de tardo inclinado; c) Muro vertical com talude de superfície inclinada; d) Muro com base larga.

Quando o muro é vertical, mas o terrapleno tem inclinação i , desde que $i < \theta$, é aceitável admitir-se as hipóteses de Rankine, com as ressalvas já feitas, e tomar a direção do empuxo paralela à superfície do terreno.

Na teoria de Rankine está a admitir-se que não existindo atrito entre o solo e o muro, a cunha de plastificação possa mover-se livremente, no caso ativo para baixo e no caso passivo para cima, em relação ao muro. Claro se torna, que a presença do atrito dificulta este movimento livre e que sua ausência aumenta a ação da cunha sobre o muro no caso ativo e a reduz no caso passivo. Em ambos os casos têm-se obras mais seguras e possivelmente mais caras do que aquelas que consideram os esforços no contato solo-estrutura.

Caso se desenvolva atrito entre solo e muro (situação mais real), ou a geometria do problema e solicitações externas tornem a teoria de Rankine inaplicável, utiliza-se a teoria de Coulomb. No cálculo de empuxos passivos nenhuma das teorias fornece valores razoáveis, sobretudo quando o atrito que se desenvolve é grande. Já foi referido neste trabalho que a presença do atrito altera a forma da superfície de ruptura tornando-a curva no seu trecho inicial próximo ao pé do talude. Para valores de δ próximos dos 10° esta hipótese de superfície plana fornece valores compatíveis com os reais. A partir deste limite a influência do atrito passa a ser considerável e melhor seria calcular o valor do empuxo passivo com base na construção gráfica denominada círculo de atrito.

Para que se entenda o procedimento empregado para a determinação do empuxo passivo através do círculo de atrito, considerem-se as Figuras 15.30 e 15.31.

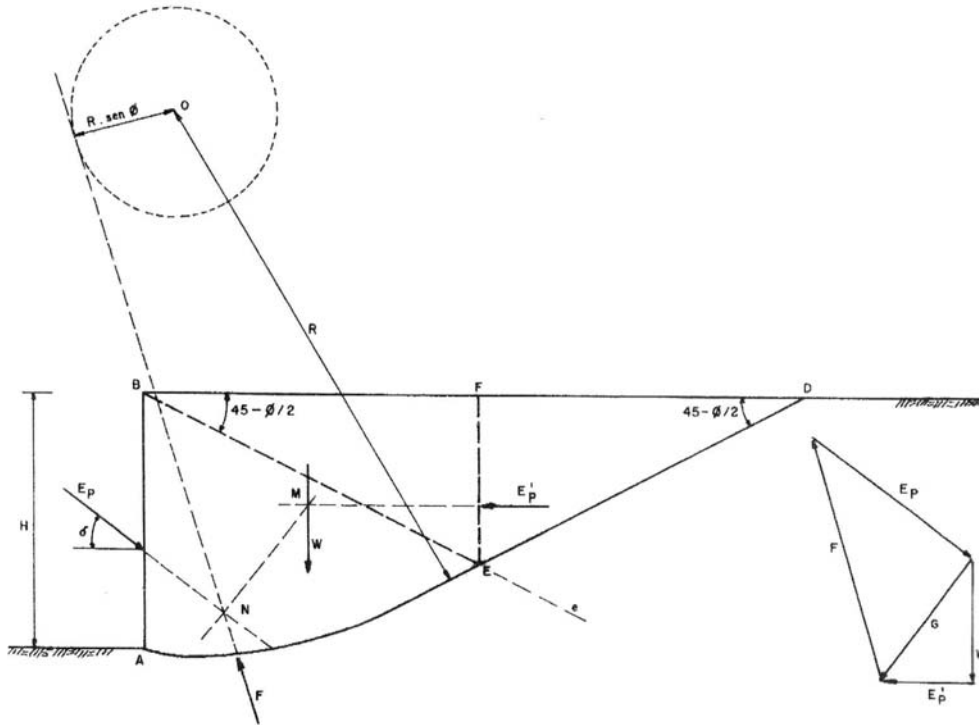


Figura 15.30 - Determinação do empuxo em solos granulares através do método do círculo de atrito.

A cunha deslizante ABD sofre a ação do muro, ação esta que pode ser representada pelo empuxo passivo E_p . Essa força está aplicada no terço médio inferior do muro ($H/3$ medido a partir do pé do muro). O empuxo passivo constitui o mínimo dos valores estabelecidos para as várias cunhas hipotéticas analisadas.

A cunha ABD pode ser dividida em duas regiões: ABE e BDE. Para definir esta cunha traçam-se por B e D retas que fazem $(45 - \phi/2)$ com a superfície do terreno; o ponto de encontro destas duas retas define o ponto E. Traça-se por E uma perpendicular ao segmento \overline{DE} . Por tentativas ajusta-se um círculo que tendo centro sobre esta perpendicular, passe por A e tenha o segmento \overline{DE} como tangente, no ponto E.

Esta construção baseia-se na hipótese que admite estar a cunha BDE no estado de plastificação de Rankine.

A cunha ABD pode ser dividida em duas outras regiões, ABFE e FED, esta, definida por uma reta vertical traçada a partir de E. O ponto F situa-se no cruzamento desta vertical com a superfície do terreno.

A porção FDE, representada pelo empuxo passivo E'_p ($E'_p = 0,5 \gamma K_p \cdot \overline{EF}^2$, com $K_p = (1 + \text{sen } \phi) \cdot (1 - \text{sen } \phi)$) atua sobre a região ABFE.

A direção de E'_p é horizontal e seu ponto de aplicação dá-se no terço médio inferior do segmento \overline{FE} .

As forças que atuam sobre a região ABFE são as seguintes:

W = peso da cunha;

F = força de atrito que age ao longo do comprimento \overline{AE} ; atua sobre uma reta base que faz um ângulo ϕ marcado em relação a superfície de ruptura. Esta reta é tangente a um círculo do centro O e raio $r = R \text{ sen } \phi$, denominado círculo de atrito;

E = empuxo passivo que constitui a reação do muro sobre a cunha ABD; atua segundo uma direção que faz ângulo δ em relação à normal ao tardoz.

Conhecidas estas forças monta-se o polígono de forças e a partir dele determina-se E_p e F . O processo é repetido para outras cunhas até que se tenha o valor do empuxo passivo.

Em termos gráficos desenham-se sobre a cunha, W e E'_p , cujos sentidos, direções e pontos de aplicação são conhecidos.

A interseção das retas base de W e E'_p define o ponto M .

Paralelamente monta-se o polígono de forças, somando-se, inicialmente, W com E'_p . A resultante desta soma dá a resultante G .

Por M traça-se uma reta paralela a G . O prolongamento da linha de ação de E_p deve encontrar esta reta no ponto N . Por N , traça-se uma tangente ao círculo de atrito, esta reta será a linha base de F .

Conhecidas as direções de E' e F completa-se o polígono de forças para definir-se o módulo da E_p .

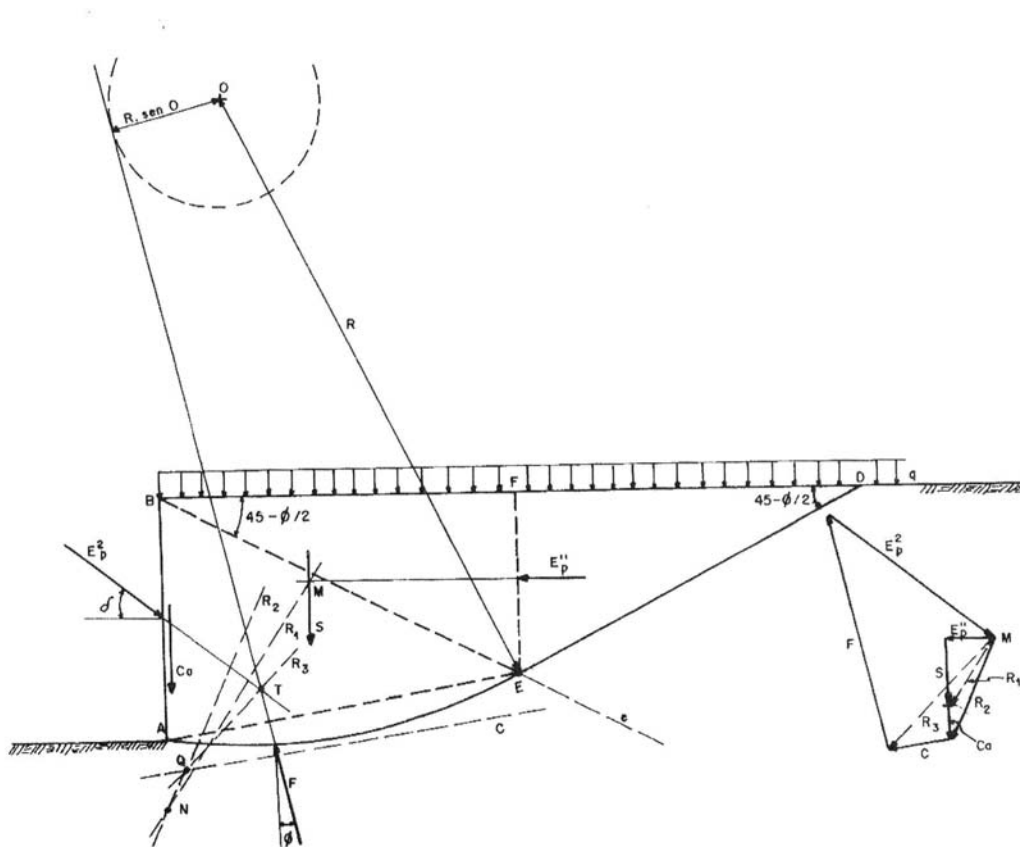


Figura 15.31 - Determinação do empuxo passivo em solos com coesão e atrito pelo método do círculo de atrito.

Para maciço com coesão e ângulo de atrito e tendo ainda a atuar, à superfície, uma sobrecarga q , o cálculo do valor do empuxo passivo pode ser obtido através do método do círculo de atrito.

Este problema pode ser colocado como a soma de dois outros: o primeiro considerando o solo como granular apenas; o segundo tendo em conta a ação da sobrecarga e da coesão, admitindo que o solo não tem peso. Estas hipóteses podem ser melhor entendidas se analisar a expressão de método de Rankine que fornece o empuxo passivo para está mesma condição:

$$E_p = \gamma H K_p + 2c \sqrt{K_p} + K_p \cdot q$$

O primeiro destes problemas considera nulos os termos $2c\sqrt{K_p} + K_p \cdot q$. Assim, tem-se um valor de empuxo passivo E_p^1 que pode ser obtido pelo processo já descrito a este valor deve-se somar aquele referente ao segundo problema E_p^2 , que considera o termo $\gamma H K_p$ nulo, ou seja, seria admitir um maciço com a mesma geometria do anterior, porém com o solo sem peso ($\gamma = 0$).

$$E_p = E_p^1 + E_p^2$$

Então, como ficou acima especificado, a parcela E_p^1 será obtida através do método do círculo de atrito conforme seqüência já descrita, de acordo com a Figura 15.30.

Para o cálculo de E_p^2 considere-se a Figura 15.31.

A forma de construção das superfícies de ruptura hipotéticas análogas à descrita para o caso de maciço granular.

A reação da região FDE sobre a porção ABFE é dada pelo empuxo passivo E_p'' referente à ação da sobrecarga que atua no trecho \overline{FD} . Ela tem seu ponto de aplicação situada à meia altura do segmento \overline{FE} visto que, neste caso, o diagrama de tensão é constante com a profundidade.

As forças que atuam sobre o elemento do solo ABFE, além de E_p'' são:

S - força resultante da sobrecarga que atua ao longo do trecho \overline{BF} ;
 Ca - força de adesão que surge no contato solo-muro;
 C - força de coesão, cujo módulo vale, $c \cdot AE$; a direção de C é tomada como a da corda \overline{AE} ;
 Sua linha de ação será tomada sobre uma reta paralela à corda referida, distante a do centro do círculo, onde:

$$a \cdot \overline{C} = C \cdot R \quad \text{ou} \quad a = \frac{C}{c} \cdot R \quad e$$

$$\overline{C} = C \cdot \overline{AE} \quad e \quad C = c \cdot AE$$

F - força de atrito que se desenvolve ao longo do trecho AE, esta força faz um ângulo ϕ com a normal ao círculo e portanto tangencia o círculo de atrito;

E_p^2 - empuxo passivo que age sobre a cunha.

Em termos gráficos monta-se o polígono de forças a partir de dados das direções e sentidos das forças envolvidas obtidas nas construções geométricas que seguem o roteiro abaixo:

- 1) inicia-se pelo polígono somando vetorialmente E_p'' e S, cuja resultante é R_1 ;
- 2) prolonga-se, no desenho, a linha de ação da E_p'' até encontrar a força S, ponto M;
- 3) por M traça-se uma reta paralela a R, que cruza a linha de ação de Ca no ponto N;
- 4) soma-se, no polígono de forças, vetorialmente R_1 e Ca dando como resultado R_2 ;
- 5) pelo ponto N traça-se uma paralela a R_2 que intercepta a reta base de C, no ponto Q;
- 6) soma-se vetorialmente R_2 a C obtendo-se a força R_3 ;
- 7) por Q traça-se uma paralela a R_3 que cruza com a linha base de E_p^2 , no ponto T;
- 8) por T traça-se uma reta tangente ao círculo de atrito, determinando-se a reta base de F;
- 9) completa-se o polígono de forças somando-se a R_3 as forças E_p^2 e F cujas direções são conhecidas. Estando a cunha em equilíbrio estas forças fornecem um polígono fechado, ou seja, as linhas base destas duas forças se interceptam definindo os módulos de E_p^2 e F.

Determina-se, assim, o empuxo total.

$$E_p = E_p^1 + E_p^2$$

Para variar as cunhas ABD e determinar o empuxo passivo (mínimo dentre os hipotéticos valores encontrados), basta considerar novos pontos E sobre a reta Ac (Figuras 15.30 e 15.31).

EXEMPLO 15.2

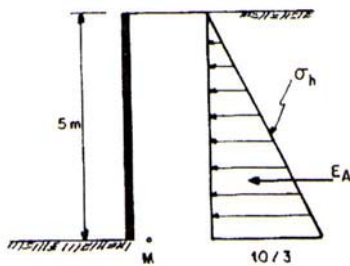
Determinar analítica e graficamente, pela Teoria de Rankine, as tensões laterais sobre um muro de arrimo vertical, com 5m de altura, nas seguintes condições.

- maciço com superfície horizontal ($i = \phi$), $\gamma = 2,0 \text{ tf/m}^3$ e $\tau = \sigma \text{ tg } 30^\circ$
- $i = 0$, $\gamma = 2,0 \text{ tf/m}^3$, $\gamma = 1 + \sigma \text{ tg } 15^\circ \text{ tf/m}^2$ sem fendas de tração
- profundidade das fendas de tração no item b).

Resolução

a) Como a teoria de Rankine admite distribuição linear de esforços, basta calcular os esforços no pé do muro.

No ponto M, tem-se:



$$\sigma_v = \gamma \cdot h = 2 \times 5 = 10 \text{ tf/m}^2$$

porém

$$\sigma_h = K_a \cdot \sigma_v$$

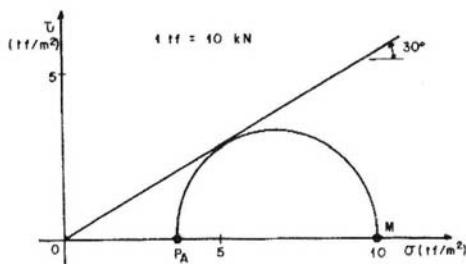
para $\phi = 30^\circ$, $K_a = 1/3$

$$\text{donde } \sigma_h = \frac{1}{3} \times 10 = \frac{10}{3} \text{ tf/m}^2$$

e o empuxo resulta

$$E_A = \frac{10}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{3} \text{ tf/m} = \frac{250}{3} \text{ kN/m}$$

Graficamente, basta utilizar o diagrama de Mohr Coulomb.



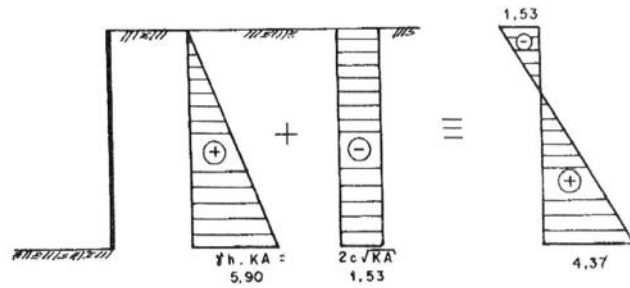
O segmento \overline{OM} equivale a σ_v ; a ruptura ativa é atingida quando o círculo tangencia a envoltória devido a uma distensão do solo. O segmento \overline{OP} corresponde à tensão lateral no ponto M, a 5m de profundidade.

$$\sigma_h = \overline{OP}_A = 3,3 \text{ tf/m}^2$$

b)

$$\sigma_{hA} = \gamma \cdot K_A - 2c \sqrt{K_A}$$

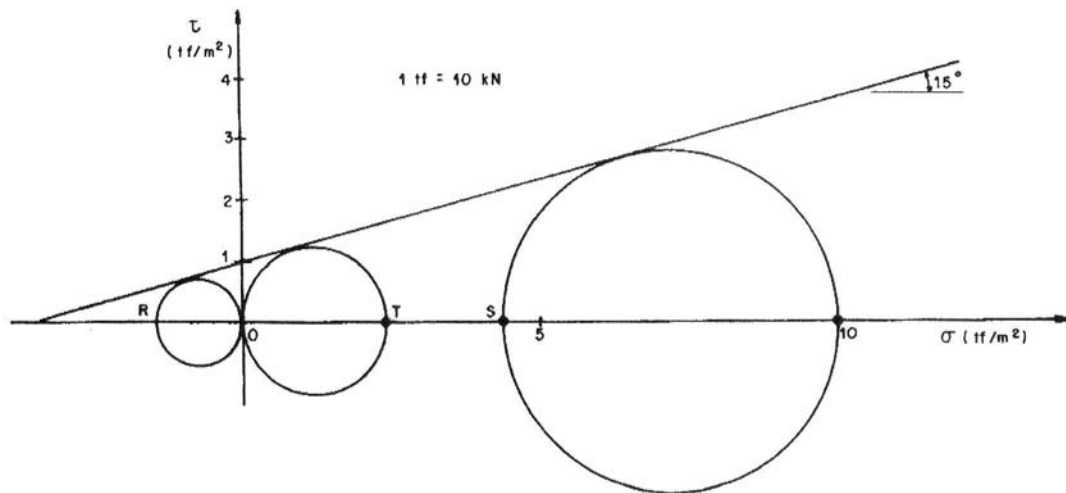
$$\phi = 15^\circ \quad K = 0,59$$



Graficamente, tem-se:

$$\text{na superfície } (z = 0) \rightarrow \sigma_v = 0 \rightarrow \sigma_{hA} = \overline{OR} = -1,5 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{no Ponto M } (z = 5\text{m}) - \sigma_v = 5 \times 2 = 10 \text{ tf/m}^2 \quad \sigma_{hA} = \overline{OS} = 4,4 \text{ tf/m}^2$$

c) profundidade das fendas de tração $\rightarrow \sigma_{hA} = 0$

$$z_0 = \frac{2c}{\gamma} \frac{1}{K_A} = \frac{2 \times 1}{2} \times \sqrt{\frac{1}{0,59}} = 1,30\text{m}$$

Graficamente:

$$\overline{OT} = \sigma_v \text{ para } \sigma_{hA} = 0$$

$$\therefore \sigma_v = \gamma \cdot z_0 = 2,54 \rightarrow z_0 = 1,27\text{m}$$

SINOPSE

1. Os problemas de empuxos de terra são tratados imaginando que o maciço atinja um estado de equilíbrio limite (Teoria de Plasticidade). Isto requer que ocorram as deformações necessárias para mobilizar toda a resistência do solo.

2. Um maciço a partir da condição em repouso (sem deformação lateral) pode atingir as condições de equilíbrio plástico ativo (ocorre distensão lateral do solo) ou de equilíbrio plástico passivo (ocorre compressão lateral do solo).

3. A grandeza dos esforços laterais sobre estruturas de arrimo depende, então, fundamentalmente, das deformações em jogo. Resultados experimentais indicam que pequenas deformações (da ordem de 0,002 H) não são suficientes para mobilizar o estado ativo, enquanto para o caso passivo são necessárias maiores deformações (acima de 0,02 H).

4. A relação entre esforços efetivos horizontais e verticais recebe o nome de coeficiente de empuxo. Pode-se ter K_0 , K_A e K_p , respectivamente, coeficientes de empuxo em repouso, ativo e passivo.

5. A Teoria de Rankine considera muro vertical e liso, isto é, ele não altera a direção dos esforços. Além disso, não é possível levar em conta pressões devidas à percolação de água. Para o caso de superfície de terreno inclinada de i e maciço de resistência $\tau = \sigma \tan \phi$ e γ tem-se:

$$K_A = \frac{\cos i - \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}{\cos i + \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \phi}}$$

$$\sigma_{ha} = K_A \cdot \sigma_v = K_A \cdot \gamma \cdot z \cdot \cos i$$

Para superfície de terrenos horizontal ($i = 0$) as expressões reduzem-se para:

$$K_A = \frac{1 - \tan \phi}{1 + \tan \phi} = \tan^2 (45 - \phi / 2)$$

$$\sigma_{ha} = K_A \cdot \gamma \cdot z$$

6. Para solos com coesão e atrito e superfície horizontal ($i = 0$) tem-se:

$$\sigma_{ha} = K_A \cdot \gamma \cdot z - 2cK_A$$

7. A determinação dos esforços por Rankine pode ser feita graficamente num plano de Mohr ($\sigma \times \tau$). Conhecida a tensão vertical (σ_v), o maciço é levado à ruptura por alívio de tensão lateral (caso ativo) ou por acréscimo de tensão (caso passivo). Quando toda a resistência é mobilizada (círculos de Mohr tangenciando a envoltória de resistência) têm-se as tensões laterais mínima (ativa) e máxima (passiva).

8. A Teoria de Coulomb considera superfície de ruptura plana, passando pelo pé do muro, atrito entre solo e muro, e permitindo calcular empuxos em problemas de geometria mais complicada.

9. O empuxo devido à água deve ser considerado separadamente. Não é possível incluir esforços devidos à percolação de água pela Teoria de Rankine. Ao assumir nível de água estático, lembrar que os coeficientes de empuxo referem-se a tensões efetivas, e que a água exerce igual pressão em todas as direções. Na análise de Coulomb basta considerar a resultante das pressões de água e incluí-la no polígono de forças.

10. Existem fórmulas teóricas para calcular esforços laterais devidos a sobrecargas aplicadas à superfície do terreno. Alguns tipos de sobrecarga (uniforme, linear, etc.) podem ser facilmente consideradas bastando incluí-las no polígono de forças.

11. Em solos que apresentam coesão existe a possibilidade de surgimento de fendas de tração. A profundidade que estas podem atingir é determinada pelo ponto em que a tensão lateral se anula ($\sigma_{ha}=0$).

12. A máxima altura que um corte vertical poderá atingir em um solo puramente coesivo ($\phi=0$), sem necessidade de escoramento é:

$$H_c = \frac{4c}{\gamma}$$

13. Os valores de empuxo passivo fornecidos pelas Teorias de Rankine ou de Coulomb afastam-se da realidade, sobretudo quando o atrito solo-muro supera 10° . Nesta situação é recomendável calcular o empuxo por outros métodos, como o do círculo de atrito, por exemplo.